

Révisions de 1^{ère} année

Equations Différentielles

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle (E) . On cherchera les solutions maximales.

- a. $(E): x(x^2 + 1)y' - y = x^3$.
- b. $(E): |1 + x| y' + y = 1 + 2x$.

Exercice 2

Résoudre $(E_\lambda): y'' - \lambda y = e^{\lambda t}$ où λ est un paramètre réel.

Exercice 3

Résoudre le système différentiel $(S): \begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3y(t) + e^t \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t) \end{cases}$ avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 4$.

☺ Poser $z = x - y$.

Exercice 4

On cherche à résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $(E): (1+t^2)y'' - 2(t-1)^2 y' - 2(2t-1)y = 0$.

- a. Soit f une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} . On pose $g(t) = (1+t^2)f'(t) + 2tf(t)$.

Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

☺ Après avoir justifié que cela est possible, calculer $g'(t) - 2g(t)$.

- b. Résoudre alors (E) .

Exercice 5

Soit l'équation $(E): y'' - y = \frac{1}{cht}$. On cherche à résoudre (E) sur \mathbb{R} .

- a. Pour toute fonction f deux fois dérivable sur \mathbb{R} , on définit la fonction $g: t \mapsto e^t f(t)$.

Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si g' est solution de

$$(E'): y' - 2y = \frac{e^t}{cht}.$$

- b. Résoudre (E') puis (E) .

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f'(t) + f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

☉ On pourra considérer f comme solution d'une équation $y' + y = g$.

Exercice 7

Résoudre l'équation différentielle (E). On cherchera les solutions maximales.

- (E): $y' = e^{t+y}$ (variable t).
- (E): $y' = 1 + y^2$.

Polynômes

Exercice 1

A quelle condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, le polynôme $X^2 + X + 1$ divise-t-il $X^4 + aX^2 + bX + c$? Donner alors le quotient.

Exercice 2

Factoriser $X^5 - 5X^3 + 5X + 2$ sur \mathbb{R} et \mathbb{C} sachant qu'il admet une racine double.

Exercice 3

On pose $P = X^{10} - 2X^9 + X^8 - 2X^6 + 4X^5 - 2X^4 + X^2 - 2X + 1$.

- Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 dans P .
- Factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4

On pose $P = X^3 + aX + b$ avec a et b réels.

- Montrer que P admet une racine au moins double si et seulement si $4a^3 + 27b^2 = 0$.
- Discuter le nombre de racines réelles de P .

Exercice 5

Factoriser $(X + i)^{2n+1} - (X - i)^{2n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$. En déduire une expression de $\prod_{k=1}^n \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Exercice 6

1) Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

$$P(z + z') = P(z) + P(z').$$

2) Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

$$P(zz') = P(z)P(z').$$

☺ On pourra commencer par supposer que P admet une racine non nulle.

Exercice 7

Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P^2 - XQ^2 = XR^2$. Montrer que $P = Q = R = 0$.

Le résultat reste-t-il vrai si $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$?

Exercice 8

Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$.

- Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P, XP', X^2P'', X^3P''')$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
- Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ dans la base \mathcal{B} .

Exercice 9

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et $E = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \setminus X^2 + 1 \mid P - P(0)\}$.

- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$.
- Déterminer une base et la dimension de E .
- Déterminer un supplémentaire de E dans $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 10

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré $q \in \mathbb{N}$ et unitaire. On définit :

$$\varphi: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]: P \mapsto Q(X+1)P(X-1) + Q(X-1)P(X+1).$$

- Montrer que φ est linéaire.
- Si P est de degré $p \in \mathbb{N}$, donner le degré et le coefficient dominant de $\varphi(P)$ en fonction de ceux de P et Q .
- Déterminer le noyau de φ .
- Existe-t-il des valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par φ ?
- φ est-elle surjective ?

Nombres complexes

Exercice 1

Soient A, B et C trois points du plan complexe, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c .
Montrer que :

$$\begin{aligned} ABC \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ est racine de l'équation } az^2 + bz + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0 \end{aligned}$$

Exercice 2 (Mines-Ponts – PSI – 2017)

Trouver les nombres complexes z tels que z, z^2 et z^5 soient les affixes de points alignés.

Exercice 3 (Arts et Métiers – PSI – 2017)

On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$. Soit f définie sur D par $f(z) = |\cos z|^2$.

On rappelle que $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$.

1. Montrer que f est bornée sur D .
2. Exprimer $f(z)$ en fonction de $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$.
3. Déterminer le maximum et le minimum de f sur D .

Exercice 4 (Centrale – PSI – 2014)

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ pour que les quatre racines z_1, z_2, z_3, z_4 du polynôme $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ soient les affixes des quatre sommets d'un carré du plan complexe.

Exercice 5 (Une construction du pentagone régulier à la règle et au compas)

On pose $z = e^{i2\pi/5}$, puis $a = z + z^4$ et $b = z^2 + z^3$.

1. Déterminer une équation du second degré dont les solutions sont a et b .
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
3. Le cercle C de centre Ω , d'affixe $z_\Omega = -\frac{1}{2}$, passant par le point M d'affixe $z_M = i$ coupe l'axe (Ox) en deux points I et J . Montrer que $x_I + x_J = x_I x_J = -1$ et en déduire une construction à la règle et au compas du pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique et dont un des sommets est le point d'affixe 1.
4. La diagonale $[AC]$ d'un pentagone régulier $ABCDE$ est recoupée par deux autres diagonales en deux points F et G . Calculer les rapports $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{FG}{AF}$.