Concours Commun Mines-Ponts

Maths II PC (3 heures)

2023

Chaînes de Markov en temps continu

Éléments de réponses

---

1 ▷ L'égalité $\mathrm{AU} = \mathrm{U}$ a lieu si et seulement si $\forall i \in [\![1;\mathrm{N}]\!],\ (\mathrm{AU})[i] = \mathrm{U}[i]$ ce qui est équivalent à dire $\forall i \in [\![1;\mathrm{N}]\!],\ \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}[i,j] \times \mathrm{U}[j] = \mathrm{U}[i]$ ou encore à $\forall i \in [\![1;\mathrm{N}]\!],\ \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}[i,j] = 1$.

Soit A et B deux noyaux de Markov. Par associativité de la multiplication matricielle, $(\mathrm{AB})\mathrm{U} = \mathrm{A}(\mathrm{BU}) = \mathrm{AU} = \mathrm{U}$ car B et A vérifient (M_2). Ainsi, AB vérifie (M_2) d'après ce qui précède. Reste à montrer que AB vérifie (M_1), ce qui est facile puisque pour tout $(i,j) \in [\![1;\mathrm{N}]\!]^2$, $(\mathrm{AB})[i,j] = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}[i,k]\mathrm{B}[k,j] \geqslant 0$ en tant que somme de réels tous positifs ou nuls (car A et B vérifient (M_1)).

2 ▷ Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on note $\mathscr{P}_n$ l'assertion « K^n est un noyau de Markov ». L'assertion $\mathscr{P}_0$ est vraie car I_N a tous ses coefficients positifs, donc I_N vérifie (M_1), et $\mathrm{I}_\mathrm{N}\mathrm{U} = \mathrm{U}$, donc I_N vérifie (M_2) d'après la question 1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si $\mathscr{P}_n$ est vraie, alors $\mathrm{K}^{n+1} = \mathrm{K}^n \times \mathrm{K}$ est un noyau de Markov d'après la question 1. Ainsi, par le principe de récurrence, K^n est un noyau de Markov pour tout $n \in \mathbf{N}$.

3 ▷ D'après la question 2, K^n est un noyau de Markov pour tout entier $n \in \mathbf{N}$. On en déduit que les coefficients de K^n sont tous dans $[0,1]$. En effet, les coefficients de chacune de ses lignes sont positifs ou nuls et leur somme fait 1. Il en résulte que pour tout $t \in \mathbf{R}$, tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $(i,j) \in [\![1;\mathrm{N}]\!]^2$,

$$\left| \frac{t^n \mathrm{K}^n[i,j]}{n!} \right| \leqslant \frac{|t|^n}{n!}.$$

Or la série $\sum \frac{|t|^n}{n!}$ est convergente (sa somme vaut $\mathrm{e}^{|t|}$), donc la série $\sum \frac{t^n \mathrm{K}^n[i,j]}{n!}$ est absolument convergente par comparaison des séries à termes positifs : elle converge donc.

4 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$ et soit $(i,j) \in [\![1;\mathrm{N}]\!]^2$. Le coefficient $\mathrm{H}_t[i,j]$ est positif car $\mathrm{e}^{-t} > 0$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mathrm{K}^n[i,j]}{n!}$ est la somme d'une série à termes positifs. Ainsi, H_t vérifie (M_1). Ensuite, en sommant N séries convergentes,

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}_t[i,k] = \mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}^n[i,k] = \mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \times 1 = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{t} = 1.$$

Ainsi, H_t vérifie aussi (M_2) et par suite H_t est un noyau de Markov.

5 ▷ Soit t et s dans $\mathbf{R}_+$. Soit aussi $(i,j) \in [\![1;\mathrm{N}]\!]^2$. Par définition,

$$(\mathrm{H}_t\mathrm{H}_s)[i,j] = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}_t[i,k] \times \mathrm{H}_s[k,j] = \mathrm{e}^{-(t+s)} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mathrm{K}^n[i,k]}{n!} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n \mathrm{K}^n[k,j]}{n!} \right].$$

Or on a établi en question 3 que les séries $\sum \frac{t^n \mathrm{K}^n[i,j]}{n!}$ et $\sum \frac{s^n \mathrm{K}^n[i,j]}{n!}$ étaient absolument convergentes, donc le théorème des produits de Cauchy s'applique et permet d'écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mathrm{K}^n[i,k]}{n!} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n \mathrm{K}^n[k,j]}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

où, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$c_n = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{t^\ell \mathrm{K}^\ell[i,k]}{\ell!} \times \frac{s^{n-\ell}\mathrm{K}^{n-\ell}[k,j]}{(n-\ell)!} = \frac{1}{n!}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}(t\mathrm{K})^\ell[i,k] \times (s\mathrm{K})^{n-\ell}[k,j].$$

Ainsi,

$$(\mathrm{H}_t\mathrm{H}_s)[i,j] = \mathrm{e}^{-(t+s)}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}(t\mathrm{K})^\ell[i,k] \times (s\mathrm{K})^{n-\ell}[k,j],$$

et en sommant N séries convergentes,

$$\begin{aligned}(\mathrm{H}_t\mathrm{H}_s)[i,j] &= \mathrm{e}^{-(t+s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}(t\mathrm{K})^\ell[i,k] \times (s\mathrm{K})^{n-\ell}[k,j]\\ &= \mathrm{e}^{-(t+s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\Big((t\mathrm{K})^\ell \times (s\mathrm{K})^{n-\ell}\Big)[i,j]\\ &= \mathrm{e}^{-(t+s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(t\mathrm{K}+s\mathrm{K})^n[i,j],\end{aligned}$$

le dernière égalité provenant de la formule du binôme, licite car $t\mathrm{K}$ et $s\mathrm{K}$ commutent.

En conclusion, $(\mathrm{H}_t\mathrm{H}_s)[i,j] = \mathrm{e}^{-(t+s)}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(t+s)^n\mathrm{K}^n[i,j] = \mathrm{H}_{t+s}[i,j]$. Comme (i,j) est quelconque, $\mathrm{H}_s\mathrm{H}_t = \mathrm{H}_{s+t}$.

6 ▷ Pour tout $(i,j) \in [\![1;\mathrm{N}]\!]^2$, $\mathrm{K}[i,j] = p_{i,j} = \mathrm{P}(\mathrm{Z}_1 = j \mid \mathrm{Z}_0 = i) \geqslant 0$ car une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, et $\sum\limits_{k=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{K}[i,k] = \sum\limits_{k=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{P}(\mathrm{Z}_1 = k \mid \mathrm{Z}_0 = i)$. Or la famille $(\mathrm{Z}_1 = k)_{1\leqslant k\leqslant \mathrm{N}}$ est un système complet d'événements, et $\mathrm{P}(\cdot \mid \mathrm{Z}_0 = i)$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, donc $\sum\limits_{k=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{P}(\mathrm{Z}_1 = k \mid \mathrm{Z}_0 = i) = \mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n}(\mathrm{Z}_j = k) \mid \mathrm{Z}_0 = i\right) = \mathrm{P}(\Omega \mid \mathrm{Z}_0 = i) = 1$. En somme, K vérifie (M_1) et (M_2), c'est donc un noyau de Markov.

7 ▷ Soit $j \in [\![1;\mathrm{N}]\!]$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons $\mathscr{P}_n$ l'assertion « $\mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = j) = \mathrm{K}^n[1,j]$ ». Si $n = 0$, $\mathrm{P}(\mathrm{Z}_0 = j) = \delta_{1,j}$ (symbole de Kronecker) car Z_0 est la variable certaine de valeur 1. Or $\mathrm{K}^0[1,j] = \mathrm{I}_\mathrm{N}[1,j] = \delta_{1,j}$, donc l'assertion $\mathscr{P}_0$ est vraie. Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$. La formule des probabilités totales relative au système d'événements $(\mathrm{Z}_n = k)_{1\leqslant k\leqslant \mathrm{N}}$ donne

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}_{n+1} = j) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{P}(\mathrm{Z}_{n+1} = j \mid \mathrm{Z}_n = k)\mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = k) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} p_{k,j}\mathrm{K}^n[1,k]$$

la dernière égalité provenant de la définition de $p_{i,j}$ et de l'hypothèse de récurrence. On reconnaît alors un produit matriciel : $\mathrm{P}(\mathrm{Z}_{n+1} = j) = (\mathrm{K}^n \times \mathrm{K})[1,j] = \mathrm{K}^{n+1}[1,j]$ si bien que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier n.

8 ▷ Par définition, $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_t = n) = \mathrm{e}^{-t}\frac{t^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

L'événement $\mathrm{A}_{t,j}$ n'est autre que $(\mathrm{Z}_{\mathrm{Y}_t} = j) = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}(\mathrm{Z}_n = j, \mathrm{Y}_t = n)$ (réunion disjointe). Or la modélisation impose que la probabilité que le système soit dans un état j ne dépend que de l'état dans lequel il était précédemment, et non du nombre d'impulsions reçues. On peut ainsi dire que les événements $(\mathrm{Z}_n = j)$ et $(\mathrm{Y}_t = n)$ sont indépendants et écrire, grâce à la σ-additivité,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_{t,j}) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = j)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{Y}_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{K}^n[1,j]\cdot\mathrm{e}^{-t}\frac{t^n}{n!},$$

ceci d'après la question 7. Ainsi, $\mathrm{P}(\mathrm{A}_{t,j}) = \mathrm{H}_t[1,j]$, par définition de H_t.

9 ▷ Le théorème spectral stipule, puisque u est un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E, que u est orthodiagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Comme on suppose de plus que $\forall x \in \mathrm{E},\ (u(x) \mid x) \geqslant 0$, l'endomorphisme u est alors autoadjoint positif, et ses valeurs propres sont toutes positives ou nulles.

10 ▷ Notons $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_\mathrm{N}$ les valeurs propres de u et considérons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale (= BON) de E constituée de vecteurs propres de u de sorte que $u(e_k) = \lambda_k e_k$ pour tout $k \in [\![1;\mathrm{N}]\!]$. Si $x \in \mathrm{E}$, on peut l'écrire $x = \sum\limits_{k=1}^{\mathrm{N}} (x \mid e_k)e_k$ et $p(x) = (x \mid e_1)e_1$ puisque p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(e_1)$. Ainsi, $u(x) = 0_\mathrm{E} + \sum\limits_{k=2}^{\mathrm{N}} (x \mid e_k)\lambda_k e_k$ et

$$\begin{aligned} q_u(x-p(x)) &= (u(x-p(x)) \mid x-p(x)) = (u(x) \mid x-p(x)) \\ &= \left(\sum_{k=2}^{\mathrm{N}} (x \mid e_k)\lambda_k e_k \,\middle|\, \sum_{\ell=2}^{\mathrm{N}} (x \mid e_\ell)e_\ell\right) \\ &= \sum_{k=2}^{\mathrm{N}}\sum_{\ell=2}^{\mathrm{N}} (x \mid e_k)\lambda_k (x \mid e_\ell)\underbrace{(e_k \mid e_\ell)}_{=\delta_{k,\ell} \text{ car BON}} = \sum_{k=2}^{\mathrm{N}} (x \mid e_k)^2\lambda_k \end{aligned}$$

Or $\lambda_2 \leqslant \lambda_k$ pour tout $k \in [\![2;\mathrm{N}]\!]$ et $(x \mid e_k)^2 \geqslant 0$, donc

$$\sum_{k=2}^{\mathrm{N}} (x \mid e_k)^2\lambda_k \geqslant \lambda_2 \sum_{k=2}^{\mathrm{N}} (x \mid e_k)^2 = \lambda_2\|x-p(x)\|^2.$$

Finalement, on a bien montré que $q_u(x-p(x)) \geqslant \lambda_2\|x-p(x)\|^2$.

11 ▷ L'hypothèse (b) faite sur π permet d'écrire, pour tout $j \in [\![1;\mathrm{N}]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}} \pi[i]\cdot\mathrm{K}[i,j] = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}[j,i]\cdot\pi[j]$, c'est-à-dire $(\pi\mathrm{K})[j] = 1 \times \pi[j]$ puisque K vérifie (M_2). On en déduit que $\pi\mathrm{K} = \pi$.

12 ▷ Soit $\mathrm{X}, \mathrm{X}', \mathrm{Y}$ dans $\mathscr{M}_{\mathrm{N},1}(\mathbf{R})$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. Il vient

$$\langle \mathrm{X}+\alpha\mathrm{X}', \mathrm{Y}\rangle = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{X}+\alpha\mathrm{X}')[i]\cdot\mathrm{Y}[i]\cdot\pi[i] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}[i]\cdot\mathrm{Y}[i]\cdot\pi[i] + \alpha\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}'[i]\cdot\mathrm{Y}[i]\cdot\pi[i] = \langle \mathrm{X},\mathrm{Y}\rangle + \alpha\langle \mathrm{X}',\mathrm{Y}\rangle$$

et, de façon évidente, $\langle \mathrm{X},\mathrm{Y}\rangle = \langle \mathrm{Y},\mathrm{X}\rangle$, si bien que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire sur $\mathscr{M}_{\mathrm{N},1}(\mathbf{R})$. Ensuite, $\langle \mathrm{X},\mathrm{X}\rangle = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[i]^2\cdot\pi[i] \geqslant 0$ en tant que somme de réels positifs (rappelons que π vérifie (P_1)). Enfin, si $\langle \mathrm{X},\mathrm{X}\rangle = 0$ c'est que $\mathrm{X}[i]^2\cdot\pi[i] = 0$ pour tout $i \in [\![1;\mathrm{N}]\!]$, et puisque π vérifie l'hypothèse (a), on en tire que $\mathrm{X}[i] = 0$ pour tout i, c'est-à-dire $\mathrm{X} = 0$. Finalement, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire définie positive, autrement dit un produit scalaire.

13 ▷ L'application u est bien un endomorphisme : celui canoniquement associé à la matrice $\mathrm{I_N} - \mathrm{K}$. Soit ensuite X et Y dans $\mathrm{E} = \mathscr{M}_{\mathrm{N},1}(\mathbf{R})$. Il vient

$$\langle u(\mathrm{X}),\mathrm{Y}\rangle = \langle(\mathrm{I_N}-\mathrm{K})\mathrm{X},\mathrm{Y}\rangle = \langle \mathrm{X},\mathrm{Y}\rangle - \langle \mathrm{KX},\mathrm{Y}\rangle.$$

D'autre part, $\langle \mathrm{KX},\mathrm{Y}\rangle = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{KX})[i]\cdot\mathrm{Y}[i]\cdot\pi[i] = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}}\left(\sum\limits_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}[i,j]\cdot\mathrm{X}[j]\right)\mathrm{Y}[i]\cdot\pi[i]$ et en permutant les deux sommes finies :

$$\langle \mathrm{KX},\mathrm{Y}\rangle = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[j]\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \pi[i]\cdot\mathrm{K}[i,j]\cdot\mathrm{Y}[i]\right) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[j]\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}[j,i]\cdot\pi[j]\cdot\mathrm{Y}[i]\right)$$

la dernière égalité provenant du fait que K est π-réversible. Ainsi,

$$\langle \mathrm{KX}, \mathrm{Y}\rangle = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[j]\cdot\pi[j]\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}[j,i]\cdot \mathrm{Y}[i]\right) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[j]\cdot\pi[j]\cdot(\mathrm{KY})[j] = \langle \mathrm{X}, \mathrm{KY}\rangle.$$

Finalement, $\langle u(\mathrm{X}), \mathrm{Y}\rangle = \langle \mathrm{X},\mathrm{Y}\rangle - \langle \mathrm{KX},\mathrm{Y}\rangle = \langle \mathrm{X},\mathrm{Y}\rangle - \langle \mathrm{X},\mathrm{KY}\rangle = \langle \mathrm{X}, u(\mathrm{Y})\rangle$ et u est bien autoadjoint.

Puisque K est un noyau de Markov, KU = U (question 1), donc $\mathrm{U} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{I_N} - \mathrm{K})$. Mais l'énoncé suppose que 1 est valeur propre simple de K, c'est-à-dire $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{I_N} - \mathrm{K}) = 1$, si bien que $\mathrm{Ker}(\mathrm{I_N} - \mathrm{K}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$ car $\mathrm{U} \neq 0$.

14 ▷ Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$. Par définition, $q_u(\mathrm{X}) = \langle u(\mathrm{X}), \mathrm{X}\rangle = \langle (\mathrm{I_N} - \mathrm{K})\mathrm{X}, \mathrm{X}\rangle = \langle \mathrm{X},\mathrm{X}\rangle - \langle \mathrm{KX},\mathrm{X}\rangle$, donc

$$q_u(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[i]^2\pi[i] - \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{KX})[i]\cdot \mathrm{X}[i]\cdot\pi[i] = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[i]^2\pi[i] - \sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}[i,j]\cdot \mathrm{X}[j]\cdot \mathrm{X}[i]\cdot\pi[i].$$

Or $\pi = \pi\mathrm{K}$ (question 11), donc pour tout i, $\pi[i] = (\pi\mathrm{K})[i] = \sum\limits_{j=1}^{\mathrm{N}} \pi[j]\cdot \mathrm{K}[j,i] = \sum\limits_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}[i,j]\cdot\pi[i]$ parce que K est π-réversible. Ainsi, en remplaçant dans la 1re somme,

$$q_u(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[i]^2\cdot \mathrm{K}[i,j]\cdot\pi[i] - \sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[i]\mathrm{X}[j]\cdot \mathrm{K}[i,j]\cdot\pi[i]$$

Mais on remarque que $\sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum\limits_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[i]^2\cdot \mathrm{K}[i,j]\cdot\pi[i] = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum\limits_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[i]^2\cdot \mathrm{K}[j,i]\cdot\pi[j]$ car K est π-réversible, si bien que cette quantité vaut encore $\sum\limits_{j=1}^{\mathrm{N}}\sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[j]^2\cdot \mathrm{K}[i,j]\cdot\pi[i]$ après renommage des indices i et j. Les deux sommes pouvant s'intervertir, nous avons finalement

$$\begin{aligned} q_u(\mathrm{X}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[i]^2\cdot \mathrm{K}[i,j]\cdot\pi[i] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[j]^2\cdot \mathrm{K}[i,j]\cdot\pi[i] - \sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[i]\mathrm{X}[j]\cdot \mathrm{K}[i,j]\cdot\pi[i] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \Big(\mathrm{X}[i]^2 + \mathrm{X}[j]^2 - 2\mathrm{X}[i]\mathrm{X}[j]\Big)\mathrm{K}[i,j]\cdot\pi[i] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \Big(\mathrm{X}[i] - \mathrm{X}[j]\Big)^2 \mathrm{K}[i,j]\cdot\pi[i] \end{aligned}$$

Cette expression montre que $q_u(\mathrm{X}) \geqslant 0$ pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$, et donc que u est autoadjoint positif. On en déduit que les valeurs propres de u sont toutes positives ou nulles.

15 ▷ Puisque ψ_{X} est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{M}_{\mathrm{N},1}(\mathbf{R})$, étudier sa dérivabilité c'est étudier la dérivabilité de ses fonctions composantes.

Pout tout $(t,i) \in \mathbf{R}\times[\![1;\mathrm{N}]\!]$, $(\psi_{\mathrm{X}}(t))[i] = (\mathrm{H}_t\mathrm{X})[i] = \sum\limits_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}_t[i,j]\mathrm{X}[j] = \mathrm{e}^{-t}\sum\limits_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[j]\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\mathrm{K}^n[i,j]}{n!}$.
Ainsi, la fonction $t \mapsto (\psi_{\mathrm{X}}(t))[i]$ est le produit de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$, dérivable, et une combinaison linéaire $\sum\limits_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[j]\mathrm{S}_j$ où $\mathrm{S}_j = t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\mathrm{K}^n[i,j]}{n!}$. On est donc amené à considérer, pour tout $j \in [\![1;\mathrm{N}]\!]$ et tout $n \in \mathbf{N}$, les fonctions

$$f_{n,j} : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t^n}{n!}\mathrm{K}^n[i,j] \end{array}$$

qui sont toutes dérivables sur $\mathbf{R}$ puisque polynomiales. De plus, $f_0' = 0$ et si $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}$, $f_{n,j}'(t) = \frac{nt^{n-1}}{n!}\mathrm{K}^n[i,j] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{K}^n[i,j]$. On avait expliqué à la question 3 que $\left|\frac{t^n\mathrm{K}^n[i,j]}{n!}\right| \leqslant \frac{|t|^n}{n!}$ pour tout entier n, donc si $[a,b]$ est un segment quelconque de $\mathbf{R}$,

$$\|f_{n,j}'\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{c^{n-1}}{(n-1)!}$$

avec $c = \max(|a|, |b|)$. Puisque la série numérique $\sum \frac{c^{n-1}}{(n-1)!}$ converge, on a établi la convergence normale (donc uniforme) de la série de fonctions $\sum(f'_{n,j})_{n\in\mathbf{N}}$ sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$. La convergence simple de $\sum(f_{n,j})_{n\in\mathbf{N}}$ a été établie à la question 3. Le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions s'applique et permet de dire que S_j est dérivable et que

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \mathrm{S}'_j(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{K}^n[i, j] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathrm{K}^{n+1}[i, j]$$

En conclusion, $t \mapsto (\psi_{\mathrm{X}}(t))[i]$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée est donnée, pour tout $t \in \mathbf{R}$, par

$$\begin{aligned}
\psi'_{\mathrm{X}}(t)[i] &= -\mathrm{e}^{-t}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{X}[j]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\mathrm{K}^n[i,j]}{n!} \quad + \quad \mathrm{e}^{-t}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{X}[j]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\mathrm{K}^{n+1}[i,j]}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{-t}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{X}[j]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\Big(\mathrm{K}^n(\mathrm{K}-\mathrm{I_N})\Big)[i,j] \\
&= \mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}}\Big(\mathrm{K}^n(\mathrm{K}-\mathrm{I_N})\Big)[i,j]\mathrm{X}[j] = \mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\Big(\mathrm{K}^n(\mathrm{K}-\mathrm{I_N})\mathrm{X}\Big)[i]
\end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout i, on peut écrire (parce que K^n et $\mathrm{K} - \mathrm{I_N}$ commutent, et par continuité du produit matriciel),

$$\psi'_{\mathrm{X}}(t) = \mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\Big(\mathrm{K}^n(\mathrm{K}-\mathrm{I_N})\mathrm{X}\Big) = (\mathrm{K}-\mathrm{I_N})\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathrm{K}^n\mathrm{X} = -(\mathrm{I_N}-\mathrm{K})\mathrm{H}_t\mathrm{X}.$$

16 ▷ Comme $\varphi_{\mathrm{X}}(t) = \langle\psi_{\mathrm{X}}(t), \psi_{\mathrm{X}}(t)\rangle$ et comme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bilinéaire sur un espace de dimension finie, φ_{X} est dérivable et

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi'_{\mathrm{X}}(t) = \langle\psi'_{\mathrm{X}}(t), \psi_{\mathrm{X}}(t)\rangle + \langle\psi_{\mathrm{X}}(t), \psi'_{\mathrm{X}}(t)\rangle = 2\langle\psi'_{\mathrm{X}}(t), \psi_{\mathrm{X}}(t)\rangle.$$

D'après la question précédente on peut donc dire, pour tout $t \in \mathbf{R}$, que

$$\varphi'_{\mathrm{X}}(t) = 2\langle-(\mathrm{I_N}-\mathrm{K})\mathrm{H}_t\mathrm{X}\ ,\ \mathrm{H}_t\mathrm{X}\rangle = -2q_u(\mathrm{H}_t\mathrm{X}).$$

17 ▷ On nous demande de montrer que $\mathrm{H}_t\mathrm{X}-\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(p)$. Or $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p)^{\perp}$ car p est une projection orthogonale, et $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(u)$ car p est la projection sur $\mathrm{Ker}(u)$. Or la question 13 montre que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$, il s'agit donc de montrer que $\mathrm{H}_t\mathrm{X} - \mathrm{X}$ est orthogonal à U c'est-à-dire de montrer que $\mathrm{A} := \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}} \big((\mathrm{H}_t\mathrm{X})[i] - \mathrm{X}[i]\big)\cdot 1 \cdot \pi[i]$ est nul. Cette quantité vaut, après interversion de deux sommes,

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{H}_t[i,j]\mathrm{X}[j]\cdot\pi[i] - \sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{X}[i]\cdot\pi[i] = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{X}[j]\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\pi[i]\mathrm{H}_t[i,j] - \sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{X}[i]\cdot\pi[i].$$

Or $\sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}} \pi[i]\mathrm{H}_t[i,j] = (\pi\mathrm{H})[j] = \pi[j]$ car H_t est un noyau de Markov (question 11), donc $\mathrm{A} = 0$. En conclusion, $\mathrm{H}_t\mathrm{X} - \mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(p)$ c'est-à-dire $p(\mathrm{H}_t\mathrm{X}) = p(\mathrm{X})$.

18 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. D'après la question 16, $\varphi'_{\mathrm{Y}}(t) = -2q_u(\mathrm{H}_t\mathrm{Y})$ donc

$$\varphi'_{\mathrm{Y}}(t) = -2q_u(\mathrm{H}_t(\mathrm{X}-p(\mathrm{X}))) = -2q_u(\mathrm{H}_t\mathrm{X}-\mathrm{H}_t p(\mathrm{X})).$$

Mais $p(\mathrm{X}) \in \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(u) \overset{\text{Q.13}}{=} \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$, et $\mathrm{H}_t\mathrm{U} = \mathrm{U}$ car H_t est un noyau de Markov (question 1). Il existe donc $m \in \mathbf{R}$ tel que $p(\mathrm{X}) = m\mathrm{U}$ si bien que $\mathrm{H}_t p(\mathrm{X}) = m\mathrm{H}_t\mathrm{U} = m\mathrm{U} = p(\mathrm{X})$. Il vient donc

$$\varphi'_{\mathrm{Y}}(t) = -2q_u(\mathrm{H}_t\mathrm{X}-p(\mathrm{X})) \overset{\text{Q.17}}{=} -2q_u(\mathrm{H}_t\mathrm{X}-p(\mathrm{H}_t\mathrm{X})) \overset{\text{Q.10}}{\leqslant} -2\lambda\|\mathrm{H}_t\mathrm{X}-p(\mathrm{H}_t\mathrm{X})\|^2 \overset{\text{Q.17}}{=} -2\lambda\|\mathrm{H}_t\mathrm{X}-p(\mathrm{X})\|^2$$

Or on vient d'expliquer que $H_t p(X) = p(X)$, donc $\|H_t X - p(X)\|^2 = \|H_t X - H_t p(X)\|^2 = \|H_t Y\|^2 = \varphi_Y(t)$. Finalement, on a bien prouvé que $\varphi_Y'(t) \leqslant -2\varphi_Y(t)$.

Pour résoudre cette inéquation différentielle, on procède comme pour l'équation différentielle correspondante : on pose $\Phi(t) = \varphi_Y(t) e^{2\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, ce qui définit une fonction dérivable Φ et on calcule

$$\Phi'(t) = \varphi_Y'(t) e^{2\lambda t} + 2\lambda \varphi_Y e^{2\lambda t} = (\varphi_Y'(t) + 2\lambda\varphi_Y(t)) e^{2\lambda t}.$$

Ce qu'on vient d'établir montre alors que $\Phi' \leqslant 0$ sur l'intervalle $\mathbf{R}_+$, donc Φ y est décroissante. En particulier, $\Phi(t) \leqslant \Phi(0)$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, c'est-à-dire $\varphi_Y(t) \leqslant \varphi_Y(0) e^{-2\lambda t}$. Puisque $H_0 = I_N$, il vient $\varphi_Y(0) = \|H_0 Y\|^2 = \|Y\|^2 = \|X - p(X)\|^2$ et on a bien montré que $\varphi_Y(t) \leqslant e^{-2\lambda t}\|X - p(X)\|^2$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$.

19 ▷ La question précédente appliquée à $X = E_i$ donne $\|H_t - p(E_i)\|^2 \leqslant e^{-2\lambda t}\|E_i - p(E_i)\|^2$ soit encore $\|H_t - p(E_i)\| \leqslant e^{-\lambda t}\|E_i - p(E_i)\|$ par croissance de $\sqrt{\cdot}$. Or l'expression de la projection orthogonale sur U est donnée par $p(X) = \langle X, \frac{U}{\|U\|}\rangle \frac{U}{\|U\|}$ avec $\|U\|^2 = \sum_{i=1}^{N} U[i]^2\pi[i] = \sum_{i=1}^{N} \pi[i] = 1$, donc $p(E_i) = \langle E_i, U\rangle U = \sum_{j=1}^{n} \delta_{i,j} \times 1\pi[j] U = \pi[i]U$. De plus, le théorème de Pythagore appliqué aux vecteurs orthogonaux $E_i - p(E_i)$ et $p(E_i)$ donne $\|E_i\|^2 = \|E_i - p(E_i)\|^2 + \|p(E_i)\|^2 \geqslant \|E_i - p(E_i)\|^2$ ce qui fournit $\|E_i - p(E_i)\| \leqslant \|E_i\|$. Puisque enfin $\|E_i\|^2 = \langle E_i, E_i\rangle = \pi[i]$, on en conclut que $\|E_i\| = \sqrt{\pi[i]}$ et donc que $\|H_t E_i - \pi[i]U\| \leqslant e^{-t}\sqrt{\pi[i]}$.

20 ▷ Soit $(i, j) \in [\![1; N]\!]^2$ et $t \in \mathbf{R}_+$. La question 5 nous apprend que $H_t = H_{\frac{t}{2}} H_{\frac{t}{2}}$, donc

$$\begin{aligned} H_t[i,j] &= \sum_{k=1}^{N} H_{\frac{t}{2}}[i,k] H_{\frac{t}{2}}[k,j] = \sum_{k=1}^{N} \Big((H_{\frac{t}{2}}[i,k] - \pi[k]) + \pi[k]\Big)\Big((H_{\frac{t}{2}}[k,j] - \pi[j]) + \pi[j]\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \Big(H_{\frac{t}{2}}[i,k] - \pi[k]\Big)\Big(H_{\frac{t}{2}}[k,j] - \pi[j]\Big) + S_1 + S_2 + S_3, \end{aligned}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{lcl} S_1 &=& \sum_{k=1}^{N} \Big(H_{\frac{t}{2}}[i,k] - \pi[k]\Big)\pi[j] = \pi[j]\left(\sum_{k=1}^{N} H_{\frac{t}{2}}[i,k] - \sum_{k=1}^{N}\pi[k]\right) = \pi[j](1-1) = 0, \\ S_2 &=& \sum_{k=1}^{N} \pi[k]\Big(H_{\frac{t}{2}}[k,j] - \pi[j]\Big) = (\pi H_{\frac{t}{2}})[j] - \pi[j]\sum_{k=1}^{N}\pi[k] \overset{Q.11}{=} \pi[j] - \pi[j] \times 1 = 0, \\ S_3 &=& \sum_{k=1}^{N} \pi[k]\pi[j] = \pi[j] \times 1 = \pi[j]. \end{array} \right.$$

Finalement, $H_t[i,j] = \sum_{k=1}^{N} \Big(H_{\frac{t}{2}}[i,k] - \pi[k]\Big)\Big(H_{\frac{t}{2}}[k,j] - \pi[j]\Big) + \pi[j]$, ce qui était demandé.

21 ▷ Soit $(i, j) \in [\![1; N]\!]^2$ et $t \in \mathbf{R}_+$. Notons premièrement que si $X \in E$ et si $i \in [\![1; N]\!]$, alors $\|X\|^2 = \sum_{k=1}^{N} X[k]^2\pi[k] \geqslant X[i]^2\pi[i]$, si bien que $|X[i]| \leqslant \frac{\|X\|}{\sqrt{\pi[i]}}$. Si l'on applique cela à $X = H_t E_j - \pi[j]U$, alors $X[i] = H_t[i,j] - \pi[j]$ et par suite

$$\big|H_t[i,j] - \pi[j]\big| \leqslant \frac{\|H_t E_j - \pi[j]U\|}{\sqrt{\pi[i]}} \overset{Q.19}{\leqslant} \frac{e^{-\lambda t}\sqrt{\pi[j]}}{\sqrt{\pi[i]}} = e^{-\lambda t}\sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}.$$

La valeur propre λ est la plus petite valeur propre non nulle de u, endomorphisme n'ayant que des valeurs propres positives ou nulles : ainsi, $\lambda > 0$ et donc $\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda t} = 0$. Le théorème des gendarmes assure que $H_t[i,j] - \pi[j]$ possède une limite quand $t \to +\infty$ et que cette limite est nulle, si bien que $\lim_{t\to+\infty} H_t[i,j] = \pi[j]$.