Corrigé de CCMP PC - 2023 - Maths 2

Préliminaires

1 ▷ Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. On a pour tout $i \in [\![1, N]\!]$:

$$(AU)[i] = \sum_{j=1}^{N} A[i, j]U[j] = \sum_{j=1}^{N} A[i, j].$$

Or, la matrice A vérifie (M_2) si et seulement si pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $\sum_{j=1}^{N} A[i, j] = 1$ soit $(AU)[i] = 1$.

Ainsi, A vérifie (M_2) si et seulement si pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $(AU)[i] = U[i]$, autrement dit :

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ vérifie } (M_2) \text{ si et seulement si } AU = U.}$$

Soient A et B deux noyaux de Markov. On a donc pour tous $i, j \in [\![1, N]\!]$, $A[i, j] \geq 0$ et $B[i, j] \geq 0$ donc :

$$(AB)[i, j] = \sum_{k=1}^{N} A[i, k]B[k, j] \geq 0.$$

De plus, $AU = BU = U$, donc :

$$(AB)U = A(BU) = AU = U.$$

D'après le résultat précédent, AB vérifie (M_2) et finalement :

$$\boxed{AB \text{ est un noyau de Markov.}}$$

2 ▷ Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, on a $K^0 = I_n$. Pour tous $i, j \in [\![1, N]\!]$, $I_n[i, j] = \delta_{i,j} \geq 0$ et $I_n U = U$, donc $K^0 = I_n$ est un noyau de Markov et la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$.

  On a $K^{n+1} = K^n K$. Or, K^n et K sont des noyaux de Markov (par hypothèse de récurrence pour la première et par hypothèse pour la seconde), donc K^{n+1} est un noyau de Markov d'après la question précédente. Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{K^n \text{ est un noyau de Markov.}}$$

3 ▷ Soit A un noyau de Markov. Pour tous $i,j\in[\![1,N]\!]$, on a $0\le A[i,j]\le\sum_{k=1}^{N}A[i,k]=1$, donc $|A[i,j]|\le 1$.

Ainsi, avec la question précédente, on a pour tous $i,j\in[\![1,N]\!]$, tout $t\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|\frac{t^nK^n[i,j]}{n!}\right|\le\frac{|t|^n}{n!}.$$

Or, la série exponentielle $\sum\frac{|t|^n}{n!}$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\frac{t^nK^n[i,j]}{n!}$ converge absolument, et ainsi, pour tous $i,j\in[\![1,N]\!]$ et $t\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{\text{La série } \sum\frac{t^nK^n[i,j]}{n!} \text{ converge.}}$$

4 ▷ Soit $t\in\mathbb{R}_+$. On a $H_t=e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}K^n$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, K^n est un noyau de Markov, donc pour tous $i,j\in[\![1,N]\!]$, $K^n[i,j]\ge 0$ et ainsi, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $\frac{t^nK^n[i,j]}{n!}\ge 0$ et donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^n[i,j]}{n!}\ge 0$. Comme $e^{-t}>0$, on a $H_t[i,j]\ge 0$. De plus :

$$H_tU=\left(e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}K^n\right)U=e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}(K^nU)=e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}U=e^{-t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\right)U=e^{-t}e^{t}U=U.$$

Ainsi, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{H_t \text{ est un noyau de Markov.}}$$

5 ▷ Soient $t,s\in\mathbb{R}_+$. Pour tous $i,j\in[\![1,N]\!]$:

$$\begin{aligned}H_{t+s}[i,j]&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(t+s)^nK^n[i,j]}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^ks^{n-k}\right)\frac{K^n[i,j]}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{K^n[i,j]}{k!(n-k)!}t^ks^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{K^k[i,j]}{k!}t^k\right)\left(\frac{K^{n-k}[i,j]}{(n-k)!}s^{n-k}\right)\right)\end{aligned}$$

Or, les séries $\sum\frac{t^nK^n[i,j]}{n!}$ et $\sum\frac{s^nK^n[i,j]}{n!}$ sont absolument convergentes, donc on peut appliquer la formule du produit de Cauchy :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{K^k[i,j]}{k!}t^k\right)\left(\frac{K^{n-k}[i,j]}{(n-k)!}s^{n-k}\right)\right)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{K^n[i,j]}{n!}t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{K^n[i,j]}{n!}s^n\right)=H_t[i,j]H_s[i,j].$$

Finalement, pour tous $i,j\in[\![1,N]\!]$, $H_{t+s}[i,j]=H_t[i,j]H_s[i,j]$, donc :

$$\boxed{H_{t+s}=H_tH_s}$$

Partie 1 - Modélisation probabiliste

6 ▷ On a $K \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ avec $K[i,j] = p_{i,j} = P_{(Z_k=i)}\left(Z_{k+1} = j\right)$ pour tous $i, j \in [\![1, N]\!]$ et tout $k \in \mathbb{N}$ (les $p_{i,j}$ sont indépendants de *k*).

Une probabilité étant positive, on a pour tous $i, j \in [\![1, N]\!]$: $\underline{K[i,j] \geq 0}$.

De plus, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $P_{(Z_k=i)}$ est une probabilité et comme $Z_{k+1}(\Omega) = [\![1, N]\!]$, on a :

$$\underline{\sum_{j=1}^{N} K[i,j] = \sum_{j=1}^{N} P_{(Z_k=i)}\left(Z_{k+1} = j\right) = 1}.$$

Ainsi, *K* vérifie (M_1) et (M_2), donc :

$$\boxed{K \text{ est un noyau de Markov.}}$$

7 ▷ Prouvons par récurrence sur *n* que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $j \in [\![1, N]\!]$, $P\left(Z_n = j\right) = K^n[1, j]$.

- Pour $n = 0$, Z_0 est la variable certaine de valeur 1, donc pour tout $j \in [\![1, N]\!]$:

  $$P\left(Z_0 = j\right) = \begin{cases} 1 & \text{quand } j = 1 \\ 0 & \text{quand } j > 1 \end{cases}$$

  Or, $K^0 = I_n$, on a $K^0[1, j] = \begin{cases} 1 & \text{quand } j = 1 \\ 0 & \text{quand } j > 1 \end{cases}$ et ainsi, $P\left(Z_0 = j\right) = K^0[1, j]$.

  La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$.

  On a $Z_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$, donc la famille $\left((Z_n = i)\right)_{i \in [\![1,N]\!]}$ est un système complet d'évènements. La loi des probabilités totales donne alors pour tout $j \in [\![1, N]\!]$:

  $$P\left(Z_{n+1} = j\right) = \sum_{i=1}^{N} P_{(Z_n=i)}\left(Z_{n+1} = j\right) P\left(Z_n = i\right) = \sum_{i=1}^{N} K[i,j] P\left(Z_n = i\right).$$

  Par hypothèse de récurrence, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $P\left(Z_n = i\right) = K^n[1, i]$, donc :

  $$P\left(Z_{n+1} = j\right) = \sum_{i=1}^{N} K^n[1,i] K[i,j] = (K^n K)[1, j] = K^{n+1}[1, j].$$

  Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{P\left(Z_n = j\right) = K^n[1, j]}$$

8 ▷ On a $Y_t(\Omega)=\mathbb{N}$, donc la famille $\left((Y_t=n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements. La loi des probabilités totales donne alors pour tout $j\in[\![1,N]\!]$:

$$P\left(A_{t,j}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}P_{(Y_t=n)}\left(A_{t,j}\right)P\left(Y_t=n\right).$$

Or, $A_{t,j}$ est l'événement : « le système est dans l'état *j* après un temps *t* » et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left(Z_n=j\right)$ est l'événement : « le système est dans l'état *j* après *n* impulsions, donc quand $\left(Y_t=n\right)$ est réalisé ». Ainsi :

$$P_{(Y_t=n)}\left(A_{t,j}\right)=P\left(Z_n=j\right).$$

Avec la question précédente et $Y_t\sim\mathcal{P}(t)$, on alors :

$$P\left(A_{t,j}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}P\left(Z_n=j\right)P\left(Y_t=n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}K^n[1,j]\frac{e^{-t}t^n}{n!}=e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^n[1,j]}{n!}=H_t[1,j].$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{P\left(A_{t,j}\right)=H_t[1,j]}$$

Partie 2 - Étude d'un endomorphisme autoadjoint

9 ▷ Comme *u* est un endomorphisme autoadjoint de *E*, espace euclidien, le théorème spectral dit que :

$\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ admet une base orthonormée de vecteurs propres.}}$

On a pour tout $x\in E$, $q_u(x)=\left(u(x)\mid x\right)\geq 0$ donc *u* est positif et ainsi :

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } u \text{ sont toutes réelles et positives.}}$

10 ▷ Considérons $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N$ les valeurs propres (distinctes ou pas, mais toutes réelles et positives) de *u* telles que $0\leq\lambda_1\leq\lambda_2\leq\dots\leq\lambda_N$ et $\left(e_1,e_2,\dots,e_N\right)$ une base orthonormée de vecteurs propres telle que pour tout $k\in[\![1,N]\!]$, $u(e_k)=\lambda_k e_k$.

Comme 0 est valeur propre simple de *u*, on a :

- $0=\lambda_1<\lambda_2$;
- $\ker(u)=\mathrm{Vect}\left(e_1\right)$;
- $\left(\ker(u)\right)^{\perp}=\mathrm{Vect}\left(e_2,\dots,e_N\right)$.

Soit $x=\sum_{k=1}^{N}x_ke_k\in E$. On a $p(x)=x_1e_1$ et $x-p(x)=\sum_{k=2}^{N}x_ke_k$, donc $\left\|x-p(x)\right\|^2=\sum_{k=2}^{N}x_k^2$ et :

$$u\left(x-p(x)\right)=u\left(\sum_{k=2}^{N}x_ke_k\right)=\sum_{k=2}^{N}x_ku(e_k)=\sum_{k=2}^{N}x_k\lambda_ke_k.$$

Alors :

$$q_u\left(x-p(x)\right)=\left(u\left(x-p(x)\right)\mid x-p(x)\right)=\left(\sum_{k=2}^{N}x_k\lambda_k e_k\,\middle|\,\sum_{k=2}^{N}x_k e_k\right)=\sum_{k=2}^{N}\lambda_k x_k^2 .$$

Comme pour tout $k\in[\![2,N]\!]$, $x_k^2\geq 0$ et $\lambda_k\geq\lambda_2$, on a :

$$q_u\left(x-p(x)\right)\geq\sum_{k=2}^{N}\lambda_2 x_k^2=\lambda_2\sum_{k=2}^{N}x_k^2=\lambda_2\left\|x-p(x)\right\|^2 .$$

Ainsi, on a bien pour tout $x\in E$:

$$\boxed{q_u\left(x-p(x)\right)\geq\lambda_2\left\|x-p(x)\right\|^2}$$

Partie 3 – Convergence de $\mathbf{H}_t[i,j]$

11 ▷ Pour tout $i\in[\![1,N]\!]$:

$$(\pi K)[i]=\sum_{j=1}^{N}\pi[j]K[j,i]=\sum_{j=1}^{N}K[i,j]\pi[i]=\left(\sum_{j=1}^{N}K[i,j]\right)\pi[i]=1\times\pi[i]=\pi[i] .$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\pi K=\pi}$$

12 ▷ L'application $(X,Y)\mapsto\langle X,Y\rangle=\sum_{i=1}^{N}X[i]Y[i]\pi[i]$ est bien définie sur $\left(\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})\right)^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Cette application est symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$.
- Pour tous $X,X',Y\in\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\langle\lambda X+X',Y\rangle&=\sum_{i=1}^{N}\left(\lambda X[i]+X'[i]\right)Y[i]\pi[i]=\sum_{i=1}^{N}\left(\lambda X[i]Y[i]\pi[i]+X'[i]Y[i]\pi[i]\right)\\&=\lambda\sum_{i=1}^{N}X[i]Y[i]\pi[i]+\sum_{i=1}^{N}X'[i]Y[i]\pi[i]=\lambda\langle X,Y\rangle+\langle X',Y\rangle\end{aligned}$$

  Ainsi, $(X,Y)\mapsto\langle X,Y\rangle$ est linéaire à gauche, donc bilinéaire par symétrie.

- Comme π est une probabilité donc pour tout $i\in[\![1,N]\!]$, $\pi[i]\geq 0$, soit $X[i]^2\pi[i]\geq 0$.

  Ainsi, $\langle X,X\rangle=\sum_{i=1}^{N}X[i]^2\pi[i]\geq 0$ et :

$$\langle X,X\rangle=\sum_{i=1}^{N}X[i]^2\pi[i]=0\quad\Leftrightarrow\quad\forall\, i\in[\![1,N]\!],\ X[i]^2\pi[i]=0 .$$

  Or, pour tout $i\in[\![1,N]\!]$, $\pi[i]\neq 0$, donc

$$\langle X,X\rangle=0\quad\Leftrightarrow\quad\forall\, i\in[\![1,N]\!],\ X[i]^2=0\quad\Leftrightarrow\quad\forall\, i\in[\![1,N]\!],\ X[i]=0\quad\Leftrightarrow\quad X=0 .$$

  Ainsi, $(X,Y)\mapsto\langle X,Y\rangle$ est définie positive.

Finalement, $(X,Y) \mapsto \langle X,Y \rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive sur $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$, donc :

$$\boxed{(X,Y) \mapsto \langle X,Y \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R}).}$$

13 ▷ La matrice de u dans la base canonique de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ est $I_N - K$, donc :

$$\ker u = \ker(I_N - K).$$

Or, par hypothèse, 1 est une valeur propre simple de K, donc $\dim\big(\ker(I_N - K)\big) = 1$. De plus, K est un noyau de Markov, donc d'après la question 1, $KU = U$ et ainsi, $U \in \ker(I_N - K)$. Comme U n'est pas nul, on obtient $\ker(I_N - K) = \operatorname{Vect}(U)$, et ainsi :

$$\boxed{\ker u = \operatorname{Vect}(U)}$$

Pour tous $X, Y \in E$:

$$\langle u(X), Y \rangle = \langle X - KX, Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \langle KX, Y \rangle.$$

Et :

$$\begin{aligned}
\langle KX, Y \rangle &= \sum_{i=1}^{N} (KX)[i]\,Y[i]\,\pi[i] = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} K[i,j]\,X[j] \right) Y[i]\,\pi[i] \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} K[i,j]\,X[j]\,Y[i]\,\pi[i] = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} K[i,j]\,X[j]\,Y[i]\,\pi[i] \\
&= \sum_{j=1}^{N} X[j] \left(\sum_{i=1}^{N} \pi[i]\,K[i,j]\,Y[i] \right) = \sum_{j=1}^{N} X[j] \left(\sum_{i=1}^{N} K[j,i]\,\pi[j]\,Y[i] \right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} X[j] \left(\sum_{i=1}^{N} K[j,i]\,Y[i] \right) \pi[j] = \sum_{j=1}^{N} X[j]\,(KY)[j]\,\pi[j] = \langle X, KY \rangle
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\langle u(X), Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \langle X, KY \rangle = \langle X, (I_N - K)Y \rangle = \langle X, u(Y) \rangle.$$

Et donc :

$$\boxed{u \text{ est autoadjoint.}}$$

14 ▷ Soit $X \in E$. Comme dans la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
q_u(X) &= \langle u(X), X \rangle = \langle X - KX, X \rangle = \langle X, X \rangle - \langle KX, X \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{N} X[i]^2\,\pi[i] - \sum_{i=1}^{N} (KX)[i]\,X[i]\,\pi[i] \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} K[i,j] \right) X[i]^2\,\pi[i] - \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} K[i,j]\,X[j] \right) X[i]\,\pi[i] \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X[i]^2\,K[i,j]\,\pi[i] - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X[i]\,X[j]\,K[i,j]\,\pi[i]
\end{aligned}$$

Et :

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(X[i]-X[j]\right)^2 K[i,j]\pi[i]=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(X[i]^2-2X[i]X[j]+X[j]^2\right)K[i,j]\pi[i]$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[i]^2K[i,j]\pi[i]-2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[i]X[j]K[i,j]\pi[i]$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[j]^2K[i,j]\pi[i]$$

Or, K est π-réversible, donc :

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[j]^2K[i,j]\pi[i]=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[j]^2K[j,i]\pi[j]=\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}X[j]^2K[j,i]\pi[j].$$

Les indices i et j étant muets, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[j]^2K[i,j]\pi[i]=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[i]^2K[i,j]\pi[i].$$

Ainsi :

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(X[i]-X[j]\right)^2 K[i,j]\pi[i]=2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[i]^2K[i,j]\pi[i]-2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[i]X[j]K[i,j]\pi[i]$$

$$=2\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[i]^2K[i,j]\pi[i]-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[i]X[j]K[i,j]\pi[i]\right)=2q_u(X)$$

Finalement, on a bien pour tout $X\in E$:

$$\boxed{q_u(X)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(X[i]-X[j]\right)^2 K[i,j]\pi[i]}$$

Pour tous $i,j\in[\![1,N]\!]$, $\left(X[i]-X[j]\right)^2\geq 0$, $K[i,j]\geq 0$ et $\pi[i]\geq 0$, donc $q_u(X)\geq 0$ et ainsi, comme dans la question 9 (u est étant autoadjoint) :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } u \text{ sont toutes réelles et positives.}}$$

15 ▷ Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\psi_X(t)=H_tX\in E$ et pour tout $i\in[\![1,N]\!]$:

$$\psi_X(t)[i]=\sum_{j=1}^{N}H_t[i,j]X[j]=\sum_{j=1}^{N}\left(e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{K^n[i,j]}{n!}t^n\right)X[j]=e^{-t}\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{K^n[i,j]X[j]}{n!}t^n$$

$$=e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{N}K^n[i,j]X[j]\right)\frac{t^n}{n!}=e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(K^nX)[i]\frac{t^n}{n!}$$

La fonction $t\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}(K^nX)[i]\frac{t^n}{n!}$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, elle est donc de classe C^∞ (et entre autres dérivable) sur $\mathbb{R}$. Comme $t\mapsto e^{-t}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, toutes les coordonnées de ψ_X sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de telles fonctions, d'où :

$$\boxed{\text{La fonction } \psi_X \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

D'après ce qui précède, on a de plus pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $i \in [\![1, N]\!]$:

$$\psi_X(t)[i] = e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(K^n X)[i]\frac{t^n}{n!}$$

$$\psi_X'(t)[i] = -e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(K^n X)[i]\frac{t^n}{n!} + e^{-t}\sum_{n=1}^{+\infty}(K^n X)[i]\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$$= -e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(K^n X)[i]\frac{t^n}{n!} + e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(K^{n+1} X)[i]\frac{t^n}{n!}$$

Donc, $\psi_X(t) = H_t X = e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}(K^n X)$ et :

$$\psi_X'(t) = -e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}(K^n X) + e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}(K^{n+1} X)$$

$$= -e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}(K^n X) + K\left(e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}(K^n X)\right) = -H_t X + K H_t X$$

Soit pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\psi_X'(t) = -(I_N - K)H_t X}$$

16 ▹ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = \|\psi_X(t)\|^2$ et ψ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\boxed{\varphi_X \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

On a de plus pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_X'(t) = 2\langle \psi_X'(t), \psi_X(t)\rangle = 2\langle -(I_N - K)H_t X, H_t X\rangle = -2\langle u(H_t X), H_t X\rangle.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\varphi_X'(t) = -2q_u(H_t X)}$$

17 ▹ On a vu dans la question 13 que $\ker u = \mathrm{Vect}(U)$. Remarquons de plus que comme π est une probabilité :

$$\|U\|^2 = \sum_{i=1}^{N} U[i]^2 \pi[i] = \sum_{i=1}^{N} 1^2 \pi[i] = \sum_{i=1}^{N} \pi[i] = 1.$$

Donc, U est unitaire. Alors :

$$p(X) = \langle X, U\rangle U$$
$$p(H_t X) = \langle H_t X, U\rangle U$$

Comme $X \mapsto H_t X$ est autoadjoint (admis à l'issue de la question 13) et H_t est un noyau de Markov (question 4), donc $H_t U = U$ (question 1), on a :

$$\langle H_t X, U\rangle = \langle X, H_t U\rangle = \langle X, U\rangle.$$

Ainsi, $p(H_t X) = \langle X, U \rangle U$, soit :

$$\boxed{p(H_t X) = p(X)}$$

18 ▹ Soit $t \in \mathbb{R}_+$. L'endomorphisme u est autoadjoint (question **13**) et positif (question **14**). On peut donc utiliser le résultat de la question **10** appliqué au vecteur $H_t Y$ (avec λ la plus petite valeur propre non nulle de u) :

$$q_u\left(H_t Y - p(H_t Y)\right) \geq \lambda \left\| H_t Y - p(H_t Y) \right\|^2.$$

Avec $H_t U = U$, $p(X) = \langle X, U \rangle U$ et $p(H_t X) = p(X)$ (vus dans la question précédente), on a :

$$H_t p(X) = H_t\left(\langle X, U \rangle U\right) = \langle X, U \rangle \left(H_t U\right) = \langle X, U \rangle U = \langle X, U \rangle U = p(X)$$

Donc :

$$\begin{aligned} p(H_t Y) &= p\left(H_t\left(X - p(X)\right)\right) = p\left(H_t X - H_t p(X)\right) \\ &= p(H_t X) - p\left(H_t p(X)\right) = p(X) - p^2(X) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$q_u\left(H_t Y\right) \geq \lambda \left\| H_t Y \right\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 q_u\left(H_t Y\right) \leq -2\lambda \left\| H_t Y \right\|^2.$$

Or, $\varphi_Y(t) = \left\| H_t Y \right\|^2$ et $\varphi_Y'(t) = -2 q_u\left(H_t Y\right)$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{\varphi_Y'(t) \leq -2\lambda \varphi_Y(t)}$$

On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_Y'(t) e^{2\lambda t} + 2\lambda \varphi_Y(t) e^{2\lambda t} \leq 0$ (car $e^{2\lambda t} > 0$). En notant $h : t \mapsto \varphi_Y(t) e^{2\lambda t}$ (qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de telles fonctions), on obtient $h'(t) \leq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, donc h est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$h(t) \leq h(0) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_Y(t) e^{2\lambda t} \leq \varphi_Y(0) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_Y(t) \leq e^{-2\lambda t} \varphi_Y(0).$$

Enfin :

$$\varphi_Y(t) = \left\| H_t Y \right\|^2 = \left\| H_t X - H_t p(X) \right\|^2 = \left\| H_t X - p(X) \right\|^2.$$

Et : $H_0 = e^{-0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n!} K^n = K^0 = I_N$, donc :

$$\varphi_Y(0) = \left\| H_0 X - p(X) \right\|^2 = \left\| X - p(X) \right\|^2.$$

Finalement, on a bien pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{\left\| H_t X - p(X) \right\|^2 \leq e^{-2\lambda t} \left\| X - p(X) \right\|^2}$$

19 ▷ Soient $i \in [\![1, N]\!]$ et $t \in \mathbb{R}_+$. En prenant $X = E_i$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\|H_t E_i - p(E_i)\|^2 \leq e^{-2\lambda t} \|E_i - p(E_i)\|^2.$$

Or, $p(E_i) = \langle E_i, U \rangle U = \left(\sum_{k=1}^{N} E_i[k] U[k] \pi[k] \right) U = \left(\sum_{k=1}^{N} \delta_{i,k} \pi[k] \right) U = \pi[i] U$, donc :

$$\|H_t E_i - \pi[i] U\|^2 \leq e^{-2\lambda t} \|E_i - \pi[i] U\|^2.$$

Et :

$$\begin{aligned} \|E_i - \pi[i]U\|^2 &= \|E_i\|^2 - 2\langle E_i, \pi[i]U \rangle + \|\pi[i]U\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{N} \delta_{i,k}^2 \pi[k] - 2\pi[i] \langle E_i, U \rangle + \pi[i]^2 \|U\|^2 \\ &= \pi[i] - 2\pi[i]^2 + \pi[i]^2 = \pi[i] - \pi[i]^2 \end{aligned}$$

Donc $\|E_i - \pi[i]U\|^2 \leq \pi[i]$, et :

$$\|H_t E_i - \pi[i]U\|^2 \leq (e^{-\lambda t})^2 \pi[i].$$

Enfin, comme $\|H_t E_i - \pi[i]U\|$, $e^{-\lambda t}$ et $\pi[i]$ sont positifs, en passant à la racine carrée, on obtient :

$$\boxed{\|H_t E_i - \pi[i]U\| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\pi[i]}}$$

20 ▷ Soient $i, j \in [\![1, N]\!]$ et $t \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} \left(H_{t/2}[i,k] - \pi[k] \right) \left(H_{t/2}[k,j] - \pi[j] \right) &= \sum_{k=1}^{N} \left(H_{t/2}[i,k] H_{t/2}[k,j] - H_{t/2}[i,k]\pi[j] - \pi[k] H_{t/2}[k,j] + \pi[k]\pi[j] \right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[i,k] H_{t/2}[k,j] - \left(\sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[i,k] \right) \pi[j] - \sum_{k=1}^{N} \pi[k] H_{t/2}[k,j] + \left(\sum_{k=1}^{N} \pi[k] \right) \pi[j] \end{aligned}$$

Or, $\sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[i,k] H_{t/2}[k,j] = \left(H_{t/2} H_{t/2} \right)[i,j]$, $\sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[i,k] = 1$ ($H_{t/2}$ est un noyau de Markov), $\sum_{k=1}^{N} \pi[k] = 1$ (p est une probabilité) et, par π-réversibilité de $H_{t/2}$:

$$\sum_{k=1}^{N} \pi[k] H_{t/2}[k,j] = \sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[j,k] \pi[j] = \left(\sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[j,k] \right) \pi[j] = \pi[j].$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{N} \left(H_{t/2}[i,k] - \pi[k] \right) \left(H_{t/2}[k,j] - \pi[j] \right) = \left(H_{t/2} H_{t/2} \right)[i,j] - \pi[j] - \pi[j] + \pi[j] = \left(H_{t/2} H_{t/2} \right)[i,j] - \pi[j].$$

Enfin, d'après la question **5**, comme $t/2 \in \mathbb{R}_+$, on a $H_{t/2} H_{t/2} = H_{t/2+t/2} = H_t$ et ainsi, on a bien :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \left(H_{t/2}[i,k] - \pi[k] \right) \left(H_{t/2}[k,j] - \pi[j] \right) = H_t[i,j] - \pi[j]}$$

21 ▷ Soient $i, j \in [\![1, N]\!]$ et $t \in \mathbb{R}_+$. On a $\left(H_t E_j - \pi[j]U\right)[k] = H_t[k, j] - \pi[j]$, donc :

$$\left\|H_t E_j - \pi[j]U\right\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \left(H_t[k, j] - \pi[j]\right)^2 \pi[k] \geq \left(H_t[i, j] - \pi[j]\right)^2 \pi[i].$$

Alors, $\left|H_t[i, j] - \pi[j]\right| \sqrt{\pi[i]} \leq \left\|H_t E_j - \pi[j]U\right\|$ et avec le résultat de la question **19**, on obtient :

$$\left|H_t[i, j] - \pi[j]\right| \sqrt{\pi[i]} \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\pi[j]}.$$

Or, par hypothèse, $\pi[i] > 0$ ($\pi[i]$ est positif et non nul), donc $\sqrt{\pi[i]} > 0$ et ainsi :

$$\boxed{\left|H_t[i, j] - \pi[j]\right| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}}$$

Comme $\lambda > 0$, on a, pour *i* et *j* fixés, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}} = 0$ et le théorème des gendarmes assure que :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} H_t[i, j] = \pi[j]}$$