Concours Blanc de Mathématiques

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 5 pages.

Problème 1

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $h_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q1. Déterminer $\mathcal{E} = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus h_x \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*\right\}$.

Pour $x \in \mathcal{E}$, on pose :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt .$$

Q2. Montrer que Γ est strictement positive sur $\mathcal{E}$.

Q3. Montrer que Γ est deux fois dérivable sur $\mathcal{E}$.

Q4. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et $\Gamma(x)$.

Désormais, on pose, pour tout $x \in \mathcal{E}$:

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} .$$

Q5. Montrer que Ψ est strictement croissante sur $\mathcal{E}$.

Q6. Établir, que pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\Psi(x+1) = \Psi(x) + \dfrac{1}{x}$.

Le but des questions suivantes est de montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\lim_{m \to +\infty} \left[\Psi(x) + \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{x+j} - \ln m \right] = 0.$$

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Phi(x) = \Psi(x) - \ln x.$$

Q7. Montrer que la série de terme général $\Phi(n+1) - \Phi(n)$ converge.

Q8. Montrer que la suite $\left(\Phi(n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Soit C sa limite.

Q9. Établir que l'on a aussi :

$$\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = C.$$

Q10. Montrer que si $C \neq 0$, alors :

$$\int_1^x \Phi(t)\, dt \underset{x \to +\infty}{\sim} C\, x.$$

Q11. Montrer que $C = 0$.

Q12. Conclure en considérant $\Psi(x+m+1)$.

Problème 2

Dans tout ce problème, *n* est un entier supérieur ou égal à 2 et l'on note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre *n* à coefficients réels ;
- $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- $\mathcal{X}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0,1\}$;
- $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $[0,1]$;
- $M^\top$ la transposée d'une matrice *M*.

Ce problème aborde l'étude de matrices à coefficients dans $\{0,1\}$ à travers plusieurs thématiques indépendantes les unes des autres. Les deux premières parties étudient quelques propriétés algébriques et topologiques des ensembles $\mathcal{X}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ définis ci-dessus. La partie III étudie deux modalités de génération aléatoire de matrices à coefficients dans $\{0,1\}$.

I – Généralités

A – Propriétés élémentaires

Q13. Justifier que $\mathcal{X}_n(\mathbb{R})$ est un ensemble fini et déterminer son cardinal.

Q14. Démontrer que pour tout $M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, $|\det M| \leq n!$ et qu'il n'y a jamais égalité.

Q15. Démontrer que $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie convexe et compacte (fermée, bornée) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q16. Soit $M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre complexe de *M*. Démontrer que $|\lambda| \leq n$ et donner un exemple explicite où l'on a l'égalité.

B – Étude de $\mathcal{X}_n^{I}(\mathbb{R}) = \mathcal{X}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$

Q17. Faire la liste des éléments de $\mathcal{X}_2^{I}(\mathbb{R})$. Préciser (en justifiant) les matrices de $\mathcal{X}_2^{I}(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

Q18. Démontrer que $\mathcal{X}_2^{I}(\mathbb{R})$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Est-ce que, pour $n \geq 2$, $\mathcal{X}_n^{I}(\mathbb{R})$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

II – Deux problèmes d'optimisation

A – Étude de la distance à $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$

Pour tout $(M, N) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$, on note $(M \mid N) = tr\left(M^{\top} N\right)$.

Q19. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter $(M \mid N)$ en fonction des coefficients de *M* et *N*.

On notera $\|M\|$ la norme euclidienne associée.

Q20. On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall\, N \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}),\ \|A - M\| \leq \|A - N\|.$$

Q21. Justifier que la matrice *M* définie ci-dessus est unique et expliciter ses coefficients en fonction de ceux de *A*.

B – Maximisation du déterminant sur $\mathcal{X}_n(\mathbb{R})$ ***et*** $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$

Q22. Montrer que le déterminant possède un maximum sur $\mathcal{X}_n(\mathbb{R})$ (noté x_n) et un maximum sur $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ (noté y_n).

Q23. Démontrer que la suite $\left(y_n\right)_{n \geq 2}$ est croissante.

Q24. Soit $J \in \mathcal{X}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. On pose $M = J - I_n$.

Calculer $\det M$ et en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = +\infty$.

Q25. Soient $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$. Fixons *i* et *j* dans $[\![1, n]\!]$ et supposons que $n_{i,j} \in \left]0, 1\right[$.

Démontrer qu'en remplaçant $n_{i,j}$ soit par 0, soit par 1, on peut obtenir une matrice N' de $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det N \leq \det N'$. En déduire que $x_n = y_n$.

III – Matrices aléatoires de $\mathcal{X}_n(\mathbb{R})$

A – Génération par une colonne aléatoire

Soient $p \in \left]0,1\right[$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p.

Q26. Calculer la probabilité que $X_1, X_2, \dots, X_n$ soient égales.

Q27. Quelle est la loi de $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$? On attend une démonstration du résultat annoncé.

Q28. Soient i et j dans $\{1, \dots, n\}$. Donner la loi de la variable aléatoire $X_{i,j} = X_i \times X_j$.

Q29. Si $\omega \in \Omega$, on introduit la matrice colonne :

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$$

et la matrice $M(\omega) = U(\omega)\left(U(\omega)\right)^{\mathsf{T}}$. L'application $M : \begin{cases} \Omega \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \omega \mapsto M(\omega) \end{cases}$ est ainsi une variable aléatoire. Soit $\omega \in \Omega$.

a) Justifier que $M(\omega) \in \mathcal{X}_n(\mathbb{R})$.

b) Démontrer que $tr\left(M(\omega)\right) \in \{0, 1, \dots, n\}$, que $M(\omega)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $rg\left(M(\omega)\right) \leq 1$.

c) Prouver que $M(\omega)$ est une matrice de projection orthogonale (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$) si et seulement si $S(\omega) \in \{0, 1\}$.

Q30. Donner la loi, l'espérance et la variance des variables aléatoires $tr(M)$ et $rg(M)$.

Q31. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer M^k en fonction de S et M.

Quelle est la probabilité pour que la suite de matrices $\left(M^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ soit convergente ?

Montrer que, dans ce cas, la limite est une matrice de projection.

Q32. Quelle est la probabilité que M admette deux valeurs propres distinctes ?

B – Génération par remplissage aléatoire

Soit $p \in \left]0,1\right[$. On part de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée M_0. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on construit la matrice M_{k+1} à partir de la matrice M_k de la manière suivante :

- on parcourt en une vague la matrice M_k et chaque coefficient nul est changé en 1 avec la probabilité p ;
- chaque action sur un coefficient est indépendante de ce qui se passe sur les autres et des vagues précédentes.

Les M_k sont donc des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X}_n(\mathbb{R})$ et l'on considère qu'elles sont définies sur un espace probabilisé commun $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Voici un exemple de réalisation de cette évolution pour $n = 2$:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $k \geq 1$, le nombre de modifications réalisées lors de la k-ième vague est noté N_k. Dans l'exemple ci-dessus : $N_1 = 2, N_2 = 0, N_3 = 1, N_4 = 1, N_5 = 0$.

On s'intéresse au plus petit indice k pour lequel la matrice M_k ne comporte que des 1 ; on dit alors qu'elle est *totalement remplie*. Dans l'exemple précédent, ce premier indice vaut 4.

On note $q = 1 - p$ et $m = n^2$.

Q33. Donner la loi de N_1, puis la loi conditionnelle de N_2 sachant $(N_1 = i)$ pour i dans un ensemble à préciser. Les variables aléatoires N_1 et N_2 sont-elles indépendantes ?

Q34. Soient i et j dans $\{1, \dots, n\}$. Le plus petit entier $k \geq 1$ tel que le coefficient ligne i, colonne j de M_k vaut 1 est noté $T_{i,j}$ (dans l'exemple ci-dessus : $T_{1,1} = 1$ et $T_{1,2} = 3$). Donner la loi de $T_{i,j}$.

Q35. Pour un entier $k \geq 1$, donner la valeur de $P(T_{i,j} \geq k)$ (un calcul est attendu).

Q36. Soient un entier $r \geq 1$ et $S_r = N_1 + \dots + N_r$. Que représente S_r ? Donner sa loi (on pourra utiliser la question précédente).

Q37. On note N le plus petit indice k pour lequel la matrice M_k est totalement remplie.

Donner une expression de la valeur exacte de l'espérance de N faisant intervenir q et m.

- FIN DU SUJET -