Corrigé du DS n° 6

I - Généralités, cas particuliers

1. Pour tout $z\in\mathbb{C}^*$ et tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|\frac{\dfrac{\left(p(n+1)\right)^r}{\left(p(n+1)\right)!}z^{n+1}}{\dfrac{(pn)^r}{(pn)!}z^n}\right|=\left(1+\frac{1}{n}\right)^r\frac{1}{(pn+p)(pn+p-1)...(pn+1)}|z|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\,.$$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum\frac{(pn)^r}{(pn)!}z^n$ converge, donc :

$$\boxed{\text{La série entière } \sum\frac{(pn)^r}{(pn)!}z^n \text{ a un rayon de convergence infini.}}$$

Comme $\sum\frac{(pn)^r}{(pn)!}z^n$ converge pour tout $z\in\mathbb{C}$, la série $\sum\frac{(pn)^r}{(pn)!}(z^p)^n$ converge aussi pour tout $z\in\mathbb{C}$, et donc :

$$\boxed{\text{La série entière } \sum\frac{(pn)^r}{(pn)!}z^{pn} \text{ a un rayon de convergence infini.}}$$

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a d'une part :

$$S_{0,1}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}-1\,.$$

Soit :

$$\boxed{S_{0,1}(x)=e^x-1}$$

Et d'autre part :

$$S_{0,2}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}-1$$

Soit :

$$\boxed{S_{0,2}(x)=\operatorname{ch}x-1}$$

On a donc $S_{0,1}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}e^x=\frac{1}{1}x^0e^x$ et $S_{0,2}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\operatorname{ch}x\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}e^x=\frac{1}{2}x^0e^x$, donc :

$$\boxed{\text{Les énoncés } (H_{0,1}) \text{ et } (H_{0,2}) \text{ sont validés.}}$$

II - Une démonstration probabiliste de $H_{r,1}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $(Z_x)^r = f(X_x)$ avec $f : t \mapsto \left(\dfrac{t}{x}\right)^r$.

La variable X_x suit une loi de Poisson de paramètre x, donc $X_x(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n)P(X_x = n) = \left(\frac{n}{x}\right)^r e^{-x}\frac{x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{x^r}\frac{n^r x^n}{n!}.$$

Si $n \geq 1$, on a $f(n)P(X_x = n) \neq 0$ et :

$$\left|\frac{f(n+1)P(X_x = n+1)}{f(n)P(X_x = n)}\right| = \frac{\dfrac{(n+1)^r x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^r x^n}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^r \frac{x}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum f(n)P(X_x = n)$ converge absolument et donc, d'après le théorème du transfert, $f(X_x)$ est d'espérance finie et :

$$E\left((Z_x)^r\right) = E\left(f(X_x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)P(X_x = n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x^r}\frac{n^r x^n}{n!}.$$

Comme $S_{r,1}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}x^n$, on peut conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{(Z_x)^r \text{ est d'espérance finie avec } E\left((Z_x)^r\right) = \frac{e^{-x}}{x^r}S_{r,1}(x).}$$

4. Soit à nouveau $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme X_x suit une loi de Poisson de paramètre x, on a :

$$\boxed{E(X_x) = V(X_x) = x}$$

Comme $E(X_x) = V(X_x) = x$, la variable $Z_x = \dfrac{X_x}{x}$ admet une espérance $E(Z_x) = \dfrac{E(X_x)}{x} = 1$ et une variance $V(Z_x) = \dfrac{V(X_x)}{x^2} = \dfrac{1}{x}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$P\left(|Z_x - E(Z_x)| \geq a\right) \leq \frac{V(Z_x)}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad P\left(|Z_x - 1| \geq a\right) \leq \frac{1}{a^2 x}.$$

En prenant alors $a = \dfrac{1}{x^{1/3}} = x^{-1/3} > 0$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$P\left(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\right) \leq \frac{1}{(x^{-1/3})^2 x} = \frac{1}{x^{1/3}}.$$

Et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{1/3}} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} P\left(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\right) = 0}$$

5. On a vu dans la question **3** que la variable $(Z_x)^r$ admet une espérance. Or, X_x est positive (car $X_x(\Omega)=\mathbb{N}$) et $x\in\mathbb{R}_+^*$, donc $(Z_x)^r$ est positive. On peut alors appliquer l'inégalité de Markov, soit pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$:

$$P\left((Z_x)^r\geq a\right)\leq\frac{E\left((Z_x)^r\right)}{a}\quad\Leftrightarrow\quad aP\left((Z_x)^r\geq a\right)\leq E\left((Z_x)^r\right).$$

Si $x>1$, on a $1-x^{-1/3}>0$ et en prenant $a=(1-x^{-1/3})^r>0$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient :

$$(1-x^{-1/3})^r P\left((Z_x)^r\geq(1-x^{-1/3})^r\right)\leq E\left((Z_x)^r\right).$$

Enfin comme $t\mapsto t^r$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $r>0$), on a $\left((Z_x)^r\geq(1-x^{-1/3})^r\right)=\left(Z_x\geq 1-x^{-1/3}\right)$ et ainsi, pour tout réel $x>1$:

$$\boxed{(1-x^{-1/3})^r P\left(Z_x\geq 1-x^{-1/3}\right)\leq E\left((Z_x)^r\right)}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^{-1/3})^r=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^{1/3}}\right)^r=1$, on veut donc montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}P\left(Z_x\geq 1-x^{-1/3}\right)=1$.

Or, d'après la question précédente, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}P\left(|Z_x-1|\geq x^{-1/3}\right)=0$. Or :

$$\left(|Z_x-1|\geq x^{-1/3}\right)=\left(Z_x-1\geq x^{-1/3}\right)\cup\left(Z_x-1\leq -x^{-1/3}\right)=\left(Z_x\geq 1+x^{-1/3}\right)\cup\left(Z_x\leq 1-x^{-1/3}\right).$$

Et :

$$\left(Z_x\leq 1-x^{-1/3}\right)=\left(Z_x<1-x^{-1/3}\right)\cup\left(Z_x=1-x^{-1/3}\right).$$

Donc :

$$\left(Z_x<1-x^{-1/3}\right)\subset\left(Z_x\leq 1-x^{-1/3}\right)\subset\left(|Z_x-1|\geq x^{-1/3}\right).$$

Et ainsi :

$$0\leq P\left(Z_x<1-x^{-1/3}\right)\leq P\left(|Z_x-1|\geq x^{-1/3}\right).$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on a alors $\lim\limits_{x\to+\infty}P\left(Z_x<1-x^{-1/3}\right)=0$, soit :

$$\lim_{x\to+\infty}P\left(Z_x\geq 1-x^{-1/3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[1-P\left(Z_x<1-x^{-1/3}\right)\right]=1.$$

Finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^{-1/3})^r=\lim\limits_{x\to+\infty}P\left(Z_x\geq 1-x^{-1/3}\right)=1$, donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(1-x^{-1/3})^r P\left(Z_x\geq 1-x^{-1/3}\right)=1}$$

6. Soit $N\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$.

On a $Y_{x,N}=Q(X_x)$ où $Q=\prod\limits_{k=0}^{N-1}(T-k)$ est un polynôme unitaire de degré *N* (et d'indéterminée notée *T*).

On a alors $Q(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}n^N$, donc :

$$Q(n)P(X_x=n)=Q(n)e^{-x}\frac{x^n}{n!}\underset{n\to+\infty}{\sim}n^N e^{-x}\frac{x^n}{n!}.$$

Or, on a vu plus haut que la série $\sum \frac{e^{-x}}{x^r}\frac{n^r x^n}{n!}$, et donc la série $\sum n^r e^{-x}\frac{x^n}{n!}$, convergent pour tout pour tout réel $r>0$. En particulier pour $r=N>0$, la série $\sum n^N e^{-x}\frac{x^n}{n!}$ converge et comme elle est à termes positifs, on peut conclure que la série $\sum Q(n)P(X_x=n)$, converge absolument, donc que :

$$\boxed{\text{La variable } Y_{x,N} \text{ admet une espérance.}}$$

Par le théorème du transfert, on a alors :

$$E(Y_{x,N})=\sum_{n=0}^{+\infty} Q(n)P(X_x=n).$$

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $Q(n)=\prod_{k=0}^{N-1}(n-k)$, donc $Q(n)=0$ quand $n<N$ et $Q(n)=\frac{n!}{(n-N)!}$. Alors :

$$E(Y_{x,N})=\sum_{n=N}^{+\infty} Q(n)P(X_x=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{(n-N)!}e^{-x}\frac{x^n}{n!}=x^N e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n-N}}{(n-N)!}.$$

Et après réindexation $k=n-N$, on obtient $E(Y_{x,N})=x^N e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=x^N e^{-x}e^x$, soit :

$$\boxed{E(Y_{x,N})=x^N}$$

7. Soit $N\in\mathbb{N}^*$.

Si on pose $H_0=1$ et pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, $H_j=\prod_{i=0}^{j-1}(T-i)$ (polynôme d'indéterminée notée *T*).

On a $\deg H_j=j$ pour tout $j\in\mathbb{N}$, donc $(H_0,H_1,\dots,H_N)$ est une famille échelonnée en degrés de $N+1$ polynômes de $\mathbb{R}_N[T]$, qui est de dimension $N+1$: c'est donc une base de $\mathbb{R}_N[T]$ et ainsi, il existe des réels $a_0,a_1,\dots,a_N$ tels que :

$$T^N=a_0H_0+a_1H_1+\dots+a_NH_N.$$

De plus, $0=0^N=a_0H_0(0)+a_1H_1(0)+\dots+a_NH_N(0)=a_0$, donc :

$$T^N=a_1H_1+\dots+a_NH_N.$$

Enfin, $\deg H_j<N$ pour tout entier $j\in[\![1,N-1]\!]$ (s'il y a lieu, c'est-à-dire si $N\geq 2$), et on peut écrire $H_N=T^N+R(T)$ avec $\deg R<N$. Donc, $T^N=a_NT^N+(a_1H_1+\dots+a_NR)$ avec $\deg(a_1H_1+\dots+a_NR)<N$ et ainsi, on a $a_N=1$.

Alors, pour tout réel $x>0$, on a :

$$(X_x)^N=\sum_{k=1}^N a_kH_k(X_x)=\sum_{k=1}^N a_k\prod_{i=0}^{k-1}(X_x-i)=\sum_{k=1}^N a_kY_{x,k}.$$

Finalement, il existe bien des réels $a_1,\dots,a_N$ tels que $a_N=1$ et pour tout réel $x>0$:

$$\boxed{(X_x)^N=\sum_{k=1}^N a_kY_{x,k}}$$

On a alors, pour tout $x\in \mathbb{R}_+^*$ et tout $N\in \mathbb{N}^*$:

$$(Z_x)^N = \left(\frac{X_x}{x}\right)^N = \frac{(X_x)^N}{x^N} = \frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N} a_k Y_{x,k}\ .$$

Et, par linéarité de l'espérance :

$$E\big((Z_x)^N\big) = E\left(\frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N} a_k Y_{x,k}\right) = \frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N} a_k E(Y_{x,k})\ .$$

Avec la question précédente, on obtient $E\big((Z_x)^N\big) = a_N\,\dfrac{x^N}{x^N}$ si $N=1$ et si $N\geq 2$:

$$E\big((Z_x)^N\big) = \frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N} a_k x^k = \sum_{k=1}^{N-1}\frac{a_k}{x^{N-k}} + a_N\,\frac{x^N}{x^N}\ .$$

En $i=N-k$ et avec $a_N=1$, on obtient $E\big((Z_x)^N\big)=1$ si $N=1$ et si $N\geq 2$:

$$E\big((Z_x)^N\big) = \sum_{k=i}^{N-1}\frac{a_{N-i}}{x^i} + 1\ .$$

Enfin, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_{N-i}}{x^i}=0$ pour tout $i\in[\![1,N-1]\!]$ (si $N\geq 2$), donc dans tous les cas :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} E\big((Z_x)^N\big)=1}$$

8. On pose $N=\lfloor r\rfloor\in\mathbb{N}$ (car $r>0$) et $s=r-N=r-\lfloor r\rfloor\in[0,1[$.

- Si $s=0$ (c'est-à-dire si r est entier), on a $t^s=1$ et $s(t-1)=1$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, donc l'inégalité $t^s\leq s(t-1)+1$ est vérifiée (c'est même une égalité).
- Si $s\in\,]0,1[$, posons pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $h(t)=t^s-s(t-1)-1$.

  La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que différence de telles fonctions et pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

  $$h'(t)=s(t^{s-1}-1)\ .$$

  Comme $s\in\,]0,1[$, on a alors :

  $$h'(t)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad t^{s-1}\geq 1 \quad\Leftrightarrow\quad t\leq 1\ .$$

  Donc, h est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$: elle admet un maximum en 1, qui est $h(1)=0$. Ainsi, $h(t)\leq 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$ et, avec $\lim\limits_{t\to 0}h(t)=s-1<0$, on obtient l'inégalité voulue pour tout $t\in\mathbb{R}_+$.

Finalement, quel que soit $s\in[0,1[$, on a bien pour tout $t\in\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{t^s\leq s(t-1)+1}$$

Comme Z_x est positive (vu question **5**), on a $(Z_x)^s\leq s(Z_x-1)+1$, soit :

$$(Z_x)^{r-N}\leq 1-s+sZ_x\ .$$

Et en multipliant par $(Z_x)^N \geq 0$, on obtient pour tout réel $x > 0$:

$$\boxed{(Z_x)^r \leq (1-s)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1}}$$

9. Avec la croissance et la linéarité de l'espérance, la question précédente donne pour tout réel $x > 0$:

$$E\left((Z_x)^r\right) \leq E\left((1-s)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1}\right) = (1-s)\,E\left((Z_x)^N\right) + s\,E\left((Z_x)^{N+1}\right).$$

Alors, avec la question **5**, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(1-x^{-1/3})^r\, P\left(Z_x \geq 1-x^{-1/3}\right) \leq E\left((Z_x)^r\right) \leq (1-s)\,E\left((Z_x)^N\right) + s\,E\left((Z_x)^{N+1}\right).$$

Et toujours avec la question **5**, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} (1-x^{-1/3})^r\, P\left(Z_x \geq 1-x^{-1/3}\right) = 1.$$

Avec la question **7**, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} E\left((Z_x)^N\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} E\left((Z_x)^{N+1}\right) = 1$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[(1-s)\,E\left((Z_x)^N\right) + s\,E\left((Z_x)^{N+1}\right)\right] = (1-s) + s = 1.$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{x \to +\infty} E\left((Z_x)^r\right) = 1.$$

Enfin, d'après la question **3**, on a $E\left((Z_x)^r\right) = \dfrac{e^{-x}}{x^r} S_{r,1}(x)$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x^r} S_{r,1}(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad S_{r,1}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} e^x x^r.$$

Ainsi, $S_{r,1}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{1} x^r e^x$, autrement dit :

$$\boxed{\text{L'énoncé } (H_{r,1}) \text{ est validé.}}$$

III - Démonstration de $H_{r,p}$ pour $p \geq 2$

10. On fixe un réel $x > 0$.

La fonction $\varphi : t \mapsto t^{1-r}(t-1)^r$ est définie, continue sur $[1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$ en tant que produit de telles fonctions et pour tout $t \in \,]1, +\infty[$:

$$\varphi'(t) = (1-r)t^{-r}(t-1)^r + rt^{1-r}(t-1)^{r-1} = \frac{(t-1)^{r-1}}{t^r}\left[(1-r)(t-1) + rt\right] = \frac{(t-1)^{r-1}}{t^r}(t-1+r).$$

Sur $]1, +\infty[$, $\varphi'(t) > 0$, donc sur $[1, +\infty[$, φ est continue et strictement croissante de $\varphi(1) = 0$ à $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$ (car $\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} t$). Donc, d'après le théorème de la bijection continue, φ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$ et $x > 0$ admet un unique antécédent $t_x = \varphi^{-1}(x)$ dans $[1, +\infty[$.

Comme $\varphi_x = \varphi - x$, φ_x s'annule en un unique élément de $[1, +\infty[$.

De plus, comme φ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, on a pour tout $t\in[1,+\infty[$:

$$\varphi_x(t)>0 \quad\Leftrightarrow\quad \varphi(t)-x>0 \quad\Leftrightarrow\quad \varphi(t)>x \quad\Leftrightarrow\quad t>\varphi^{-1}(x)=t_x .$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe un unique } t_x\in[1,+\infty[\text{ tel que } \varphi_x(t_x)=0 \text{ et } \varphi_x<0 \text{ sur } [1,t_x[\text{ et } \varphi_x>0 \text{ sur }]t_x,+\infty[.}$$

Pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$u_{n+1}(x)-u_n(x)=\frac{(n+1)^r}{(n+1)!}x^{n+1}-\frac{n^r}{n!}x^n=\frac{(n+1)^{r-1}}{n!}x^{n+1}-\frac{n^r}{n!}x^n=\frac{(n+1)^{r-1}}{n!}x^n\left(x-n^r(n+1)^{1-r}\right).$$

Donc, $u_{n+1}(x)-u_n(x)=-\dfrac{(n+1)^{r-1}}{n!}x^n\varphi_x(n+1)$ et comme $\dfrac{(n+1)^{r-1}}{n!}x^n>0$, $u_{n+1}(x)-u_n(x)$ est du signe opposé à celui de $\varphi_x(n+1)$. Ainsi :

$$u_{n+1}(x)-u_n(x)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \varphi_x(n+1)\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad n+1\in[1,t_x] \quad\Leftrightarrow\quad n+1\leq\lfloor t_x\rfloor=N_x .$$

Et ainsi, $\left(u_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante jusqu'au rang N_x, donc :

$$\boxed{\left(u_n(x)\right)_{0\leq n\leq N_x} \text{ est croissante et } \left(u_n(x)\right)_{n\geq N_x} \text{ est décroissante.}}$$

On note $M_x=u_{N_x}(x)$, le maximum de $\left\{u_n(x),n\in\mathbb{N}\right\}$.

11. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $x+\alpha\in[1,+\infty[$, soit $x\geq 1-\alpha$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_x(x+\alpha)&=(x+\alpha)^{1-r}(x+\alpha-1)^r-x=x^{1-r}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{1-r}x^r\left(1+\frac{\alpha-1}{x}\right)^r-x\\&=x\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{1-r}\left(1+\frac{\alpha-1}{x}\right)^r-x=x\left[1+(1-r)\frac{\alpha}{x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right]\left[1+r\frac{\alpha-1}{x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right]-x\\&=x\left[1+r\frac{\alpha-1}{x}+(1-r)\frac{\alpha}{x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right]-x=\alpha-r+\underset{x\to+\infty}{o}(1)\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\varphi_x(x+\alpha)=\alpha-r}$$

On a vu que φ réalise une bijection strictement croissante de $[1,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$, donc φ^{-1} réalise une bijection strictement croissante de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi^{-1}(x)=+\infty$. De plus :

$$\varphi(t)=t^{1-r}(t-1)^r=t^{1-r}t^r\left(1-\frac{1}{t}\right)^r=t\left(1-\frac{1}{t}\right)^r=t\left(1-r\frac{1}{t}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t}\right)\right)=t-r+\underset{t\to+\infty}{o}(1).$$

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(t-\varphi(t)\right)=r$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi^{-1}(x)=+\infty$, on a en posant $t=\varphi^{-1}(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\varphi^{-1}(x)-x\right)=r .$$

Enfin, comme $t_x=\varphi^{-1}(x)$, on obtient :

$$\boxed{t_x-x-r\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}$$

12. Soit $k\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\lfloor x\rfloor+k\geq 0$ et $\lfloor x\rfloor>0$. On a toujours $u_{\lfloor x\rfloor}(x)\neq 0$ et :

$$\frac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)}=\frac{\dfrac{(\lfloor x\rfloor+k)^r}{(\lfloor x\rfloor+k)!}x^{\lfloor x\rfloor+k}}{\dfrac{\lfloor x\rfloor^r}{\lfloor x\rfloor!}x^{\lfloor x\rfloor}}=\frac{\lfloor x\rfloor!}{(\lfloor x\rfloor+k)!}\left(\frac{\lfloor x\rfloor+k}{\lfloor x\rfloor}\right)^r x^k.$$

Si $k=0$, on a $u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)=u_{\lfloor x\rfloor}(x)$, sinon :

$$\frac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)}=\begin{cases}\dfrac{x^k}{(\lfloor x\rfloor+1)\ldots(\lfloor x\rfloor+k)}\left(1+\dfrac{k}{\lfloor x\rfloor}\right)^r & \text{si } k>0\\[2ex] \dfrac{\lfloor x\rfloor\ldots(\lfloor x\rfloor-|k|+1)}{x^{|k|}}\left(1+\dfrac{k}{\lfloor x\rfloor}\right)^r & \text{si } k<0\end{cases}$$

Or, $\left(1+\dfrac{k}{\lfloor x\rfloor}\right)^r\underset{x\to+\infty}{\sim}1$ et $\lfloor x\rfloor\ldots(\lfloor x\rfloor-|k|+1)\underset{x\to+\infty}{\sim}(\lfloor x\rfloor+1)\ldots(\lfloor x\rfloor+k)\underset{x\to+\infty}{\sim}\lfloor x\rfloor^k$, donc, dans tous les cas :

$$\frac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x^k}{\lfloor x\rfloor^k}=\left(\frac{x}{\lfloor x\rfloor}\right)^k.$$

De plus, on a $0<\lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$ donc $1\leq\dfrac{x}{\lfloor x\rfloor}<1+\dfrac{1}{\lfloor x\rfloor}$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\lfloor x\rfloor}=1$, qui implique que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\lfloor x\rfloor}\right)^k=1.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)}=1$, soit :

$$\boxed{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}u_{\lfloor x\rfloor}(x)}$$

13. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $x\geq m$, donc $\lfloor x\rfloor\geq m$.

On a vu que $t_x-x\xrightarrow[x\to+\infty]{}r>0$, donc il existe $A\in\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout réel $x\geq A$, $t_x-x\geq 0$, soit $x\leq t_x$ qui, avec $\lfloor x\rfloor\geq m$, implique que $0\leq\lfloor x\rfloor-m\leq\lfloor x\rfloor\leq N_x$. D'après la question 2, on a alors :

$$u_{\lfloor x\rfloor-m}(x)\leq u_{\lfloor x\rfloor-m+1}(x)\leq\ldots\leq u_{\lfloor x\rfloor}(x)\quad\Rightarrow\quad\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor}u_i(x)\geq\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor}u_{\lfloor x\rfloor-m}(x)=(m+1)u_{\lfloor x\rfloor-m}(x).$$

Or, d'après la question précédente, $u_{\lfloor x\rfloor-m}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}u_{\lfloor x\rfloor}(x)$, donc il existe $B_m\in\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout réel $x\geq B_m$, on a :

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)u_{\lfloor x\rfloor-m}(x)\leq u_{\lfloor x\rfloor}(x)\leq\left(1+\frac{1}{m}\right)u_{\lfloor x\rfloor-m}(x)\quad\Rightarrow\quad(m+1)u_{\lfloor x\rfloor-m}(x)=m\left(1+\frac{1}{m}\right)u_{\lfloor x\rfloor-m}(x)\geq m\,u_{\lfloor x\rfloor}(x).$$

Alors, pour tout réel $x\geq\max(m,A,B_m)$, on a :

$$\boxed{\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor}u_i(x)\geq m\,u_{\lfloor x\rfloor}(x)}$$

Comme pour tout $i \in [\![\lfloor x \rfloor - m, \lfloor x \rfloor]\!]$, $i^r \le \lfloor x \rfloor^r \le x^r$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\dfrac{x^i}{i!} \ge 0$, on peut écrire :

$$\sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) = \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} \frac{i^r}{i!} x^i \le \lfloor x \rfloor^r \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} \frac{x^i}{i!} \le x^r \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} \frac{x^i}{i!} \le x^r \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = x^r e^x .$$

Ainsi, pour tout réel $x \ge \max(m, A, B_m)$, on a $m\, u_{\lfloor x \rfloor}(x) \le \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \le x^r e^x$, donc :

$$\boxed{u_{\lfloor x \rfloor}(x) \le \frac{x^r e^x}{m}}$$

14. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Si on pose $m = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$ et $C = \max(m, A, B_m)$ tel que défini dans la question précédente, on a $\dfrac{1}{m} < \varepsilon$ et pour tout réel $x \ge C$, $u_{\lfloor x \rfloor}(x) \le \dfrac{x^r e^x}{m} < \varepsilon\, x^r e^x$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel $x \ge C$, $u_{\lfloor x \rfloor}(x) < \varepsilon\, x^r e^x$. Ceci permet de conclure que :

$$u_{\lfloor x \rfloor}(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\left(x^r e^x\right).$$

Enfin, comme d'après la question 4, on a $u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$\boxed{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\left(x^r e^x\right) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.}$$

Rappelons que $M_x = u_{N_x}(x)$ avec $N_x = \lfloor t_x \rfloor$ et que $t_x - x - r \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, donc il existe $D \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel $x \ge D$, $-1 \le t_x - x - r \le 1$, et :

$$\lfloor r \rfloor - 1 \le \lfloor t_x - x \rfloor \le \lfloor r \rfloor + 1.$$

De plus, pour tous réels a et b, on a :

$$\begin{cases} a+b-1 < \lfloor a+b \rfloor \le a+b \\ a-1 \le \lfloor a \rfloor \le a \\ b-1 \le \lfloor b \rfloor \le b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b-1 < \lfloor a+b \rfloor \le a+b \\ -a \le -\lfloor a \rfloor < -a+1 \\ -b \le -\lfloor b \rfloor < -b+1 \end{cases} \Rightarrow -1 < \lfloor a+b \rfloor - \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor < 2.$$

Et comme $\lfloor a+b \rfloor - \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor$ est entier, on obtient $0 \le \lfloor a+b \rfloor - \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor \le 1$, soit :

$$\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + \varepsilon \text{ avec } \varepsilon = 0 \text{ ou } 1.$$

Ainsi, $N_x = \lfloor t_x \rfloor = \lfloor t_x - x + x \rfloor = \lfloor t_x - x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \varepsilon$ avec $0 \le \varepsilon \le 1$ et :

$$\lfloor r \rfloor - 1 \le \lfloor t_x - x \rfloor \le \lfloor r \rfloor + 1 \Rightarrow \lfloor r \rfloor - 1 + \lfloor x \rfloor + \varepsilon \le N_x \le \lfloor r \rfloor + 1 + \lfloor x \rfloor + \varepsilon.$$

D'où, avec $0 \le \varepsilon \le 1$:

$$\lfloor r \rfloor - 1 \le \lfloor r \rfloor - 1 + \varepsilon \le N_x - \lfloor x \rfloor \le \lfloor r \rfloor + 1 + \varepsilon \le \lfloor r \rfloor + 2.$$

Ainsi, $N_x = \lfloor x \rfloor + i$ où i est un entier compris entre $\lfloor r \rfloor - 1$ et $\lfloor r \rfloor + 2$.

On a alors :

$$\left.\begin{aligned} u_{\lfloor x\rfloor+\lfloor r\rfloor-1}(x) &= \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right)\\ u_{\lfloor x\rfloor+\lfloor r\rfloor}(x) &= \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right)\\ u_{\lfloor x\rfloor+\lfloor r\rfloor+1}(x) &= \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right)\\ u_{\lfloor x\rfloor+\lfloor r\rfloor+2}(x) &= \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad M_x = u_{N_x}(x) = u_{\lfloor x\rfloor+i}(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right).$$

Donc :

$$\boxed{M_x = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right)}$$

15. Comme $z\neq 1$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$|D_n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| = \left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| = \frac{|1-z^n|}{|1-z|} \leq \frac{|1|+|z^n|}{|1-z|} = \frac{1+|z|^n}{|1-z|}.$$

Et comme $|z|=1$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{|D_n| \leq \frac{2}{|1-z|}}$$

D'après la question 1 (en prenant $p=1$), la série $\sum u_n(x) = \sum \frac{n^r}{n!}x^n$ est absolument convergente pour tout $x\in\mathbb{R}$. Comme la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée :

$$\boxed{\text{Les séries } \sum D_n u_{n-1}(x) \text{ et } \sum D_n u_n(x) \text{ sont absolument convergentes.}}$$

16. Comme les séries $\sum D_n u_{n-1}(x)$ et $\sum D_n u_n(x)$ sont absolument convergentes, donc convergentes, on peut écrire pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} D_n\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_{n-1}(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} D_{n+1} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x)\\ &= D_1 u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(D_{n+1}-D_n\right)u_n(x) = u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} z^n u_n(x)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \frac{n^r}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}(zx)^n\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} D_n\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right) = S_{r,1}(zx)}$$

La série $\sum D_n\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right)$ est absolument convergente, car $\sum D_n u_{n-1}(x)$ et $\sum D_n u_n(x)$ le sont et on a :

$$\left|S_{r,1}(zx)\right|=\left|\sum_{n=1}^{+\infty} D_n\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right)\right|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\left|D_n\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right)\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\left|D_n\right|\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right|.$$

De même, la série $\sum\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right)$ est absolument convergente, car $\sum u_n(x)$, et donc $\sum u_{n-1}(x)$, le sont, donc, avec la question précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\left|S_{r,1}(zx)\right| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{|1-z|}\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right|=\frac{2}{|1-z|}\sum_{n=1}^{+\infty}\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right| \\ &\leq \frac{2}{|1-z|}\left(\sum_{n=1}^{N_x}\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right|+\sum_{n=N_x+1}^{+\infty}\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right|\right)\end{aligned}.$$

On a vu que la suite $\left(u_n(x)\right)_{n\geq N_x}$ est croissante jusqu'au rang N_x, puis décroissante, donc :

- pour $n\leq N_x$, $u_{n-1}(x)-u_n(x)\leq 0$ et $\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right|=u_n(x)-u_{n-1}(x)$;
- pour $n> N_x$, $u_{n-1}(x)-u_n(x)\geq 0$ et $\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right|=u_{n-1}(x)-u_n(x)$.

Alors :

$$\left|S_{r,1}(zx)\right|\leq\frac{2}{|1-z|}\left(\sum_{n=1}^{N_x}\left[u_n(x)-u_{n-1}(x)\right]+\sum_{n=N_x+1}^{+\infty}\left[u_{n-1}(x)-u_n(x)\right]\right).$$

Or :

$$\sum_{n=1}^{N_x}\left[u_n(x)-u_{n-1}(x)\right]+\sum_{n=N_x+1}^{+\infty}\left[u_{n-1}(x)-u_n(x)\right]=u_{N_x}(x)-u_0(x)+u_{N_x}(x)=2M_x-u_0(x)\leq 2M_x.$$

Et ainsi :

$$\boxed{\left|S_{r,1}(zx)\right|\leq\frac{4M_x}{|1-z|}}$$

On a établi dans la question 6 que $M_x\underset{x\to+\infty}{=}o\left(x^re^x\right)$.

L'inégalité ci-dessus donne alors immédiatement :

$$\boxed{S_{r,1}(zx)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(x^re^x\right)}$$

17. Pour tout réel *x*, on a :

$$\sum_{k=0}^{p-1}S_{r,1}(\omega^kx)=\sum_{k=0}^{p-1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}(\omega^kx)^n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\frac{n^r}{n!}(\omega^kx)^n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^r}{n!}x^n\sum_{k=0}^{p-1}(\omega^n)^k\right).$$

Comme $\omega=\exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$, $\omega^n=1$ si et seulement si *p* divise *n* et dans ce cas, $\sum_{k=0}^{p-1}(\omega^n)^k=\sum_{k=0}^{p-1}1=p$.

Dans tous les autres cas, on a $\omega^n\neq 1$ et :

$$\sum_{k=0}^{p-1}(\omega^n)^k=\frac{1-(\omega^n)^p}{1-\omega^n}=\frac{1-(e^{2i\pi})^n}{1-\omega^n}=0.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = \sum_{\substack{n=1 \\ p|n}}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n p = p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!} x^{pn} = p\, S_{r,p}(x)\,.$$

On a donc bien pour tout réel x :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = p\, S_{r,p}(x)}$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = S_{r,1}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x)\,.$$

Et, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\left|\omega^k\right| = 1$ et $\omega^k \neq 1$, donc $S_{r,1}(\omega^k x) = \underset{x \to +\infty}{o}\left(x^r e^x\right)$ d'après la question précédente. Alors :

$$\sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = \underset{x \to +\infty}{o}\left(x^r e^x\right).$$

De plus, on a admis la propriété désirée pour $p = 1$, soit $S_{r,1}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^r e^x$ ou bien :

$$S_{r,1}(x) = x^r e^x + \underset{x \to +\infty}{o}\left(x^r e^x\right).$$

Ainsi :

$$p\, S_{r,p}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = S_{r,1}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = x^r e^x + \underset{x \to +\infty}{o}\left(x^r e^x\right).$$

Soit $p\, S_{r,p}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^r e^x$ et donc, on a bien le résultat désiré pour $p \geq 2$:

$$\boxed{S_{r,p}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p} x^r e^x}$$

IV - Application à une équation différentielle

18. Soit $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$ une éventuelle solution de (E), développable en série entière sur $]-R, R[$ avec $R > 0$. On a alors pour tout $t \in \,]-R, R[$, $f''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n t^{n-2}$, et :

$$\begin{aligned} t f''(t) - f(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\, c_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n\, c_{n+1} t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+1) n\, c_{n+1} - c_n\right] t^n \end{aligned}$$

Comme *f* est solution de (E), on a $t f''(t) - f(t) = 0$ pour tout $t \in \,]-R, R[$ et, par unicité du développement en série entière, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1) n\, c_{n+1} - c_n = 0$, soit $c_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$c_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} c_n\,.$$

Remarquons que si $c_n \neq 0$, alors $c_{n+1} \neq 0$, donc avec l'hypothèse supplémentaire $f'(0)=1$, soit $c_1 = 1 \neq 0$, on a $c_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on peut écrire pour tout entier $n \geq 2$:

$$c_n = \frac{c_n}{c_1} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{c_{k+1}}{c_k} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{(n-1)!n!}.$$

L'expression ci-dessus reste vraie pour $n=1$ et ainsi, $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-1)!n!}$.

Remarquons que $\frac{1}{(n-1)!n!} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n!}\right)$ et $\sum \frac{t^n}{n!}$ converge pour tout réel t, donc le rayon de convergence de de la série entière $\sum \frac{t^n}{(n-1)!n!}$ est infini.

Finalement :

$$\boxed{\text{L'équation } (E) \text{ admet une unique solution développable en série entière sur } \mathbb{R} \text{ et telle que } f'(0)=1 \text{ ; c'est la fonction : } f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-1)!n!}.}$$

19. La formule de Stirling donne $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, donc $(n-1)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} = \left(\frac{n-1}{e}\right)^n \frac{e}{n-1} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{e}{n-1} = \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1+n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \frac{1}{n-1}$$

Comme $1+n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on obtient :

$$\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n}.$$

Alors, $(n-1)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n}$ et :

$$c_n = \frac{1}{(n-1)!n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e}{n}\right)^{2n}.$$

Par ailleurs :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} 4^n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e}{n}\right)^{2n}.$$

Donc par transitivité de $\underset{n\to+\infty}{\sim}$, on obtient bien :

$$\boxed{c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n}$$

20. D'après ce qui précède, on a, avec $c_n = \dfrac{1}{(n-1)!n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

(i) La série entière $\sum c_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n > 0$.

(iii) $c_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \dfrac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n$.

Alors, d'après le résultat admis, la série entière $\sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \dfrac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n \right) z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n t^n \underset{t \to +\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n \right) t^n .$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n \right) t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2n}}{(2n)!} \left(2\sqrt{t}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)^{1/2}}{(2n)!} \left(2\sqrt{t}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_{1/2,2}\left(2\sqrt{t}\right).$$

D'après la partie précédente, on a $S_{r,p}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{p} x^r e^x$ pour tout entier naturel $p \geq 2$ et tout réel $r > 0$, donc pour $p = 2$ et $r = \dfrac{1}{2}$, on peut écrire :

$$S_{1/2,2}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} x^{1/2} e^x .$$

Et quand $t \to +\infty$, $2\sqrt{t} \to +\infty$, donc :

$$S_{1/2,2}\left(2\sqrt{t}\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \left(2\sqrt{t}\right)^{1/2} e^{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{2}} t^{1/4} e^{2\sqrt{t}} .$$

Et comme $f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} S_{1/2,2}\left(2\sqrt{t}\right)$, on obtient bien :

$$\boxed{f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{1/4} e^{2\sqrt{t}}}$$