Corrigé du DM n° 8

III. Deux premières implications

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Si A vérifie (C$_1$), alors il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que ${}^tA = P(A)$. Or, tout polynôme en A commute avec A, donc ${}^tA = P(A)$ commute avec A, autrement dit A est normale. Ainsi :

Si la matrice A vérifie la condition (C$_1$), alors elle vérifie la condition (C$_2$).

6. Si A vérifie (C$_2$), alors ${}^tAA = A\,{}^tA$. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\left\|{}^tAX\right\|^2 = {}^t({}^tAX)({}^tAX) = {}^tXA\,{}^tAX = {}^tX\,{}^tAAX = {}^t(AX)(AX) = \left\|AX\right\|^2.$$

Ainsi, $\left\|{}^tAX\right\| = \left\|AX\right\|$, donc :

Si la matrice A vérifie la condition (C$_2$), alors elle vérifie la condition (C$_3$).

IV. La condition (C$_3$) implique la condition (C$_4$)

7. On considère $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant (C$_3$), soit pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\left\|{}^tAX\right\| = \left\|AX\right\|$.

Ceci se traduit par pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $AX = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{pmatrix}$, ${}^tAX = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ et :

$$\begin{aligned}
\left\|{}^tAX\right\| = \left\|AX\right\| \quad &\Leftrightarrow \quad (ax+by)^2 + (cx+dy)^2 = (ax+cy)^2 + (bx+dy)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + c^2x^2 + 2cdxy + d^2y^2 \\
&\qquad\qquad = a^2x^2 + 2acxy + c^2y^2 + b^2x^2 + 2bdxy + d^2y^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (b^2 - c^2)y^2 + (c^2 - b^2)x^2 + 2(ab + cd - ac - bd)xy = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (b-c)\left[(b+c)(y^2 - x^2) + 2(a-d)xy\right] = 0
\end{aligned}$$

- Avec $(x, y) = (1, 0)$, on obtient : $(b-c)(b+c) = 0$.
- Avec $(x, y) = (1, 1)$, on obtient : $(b-c)(a-d) = 0$.

Donc, soit $b = c$, soit $\begin{cases} b + c = 0 \\ a - d = 0 \end{cases}$. De plus si $b = 0$, alors la première équation donne $c = 0 = b$.

Donc, on a bien :

$b = c$ ou bien $\left(c = -b \neq 0 \text{ et } a = d\right)$.

Alors, si A vérifie (C_3), on a :

$$A = {}^tA = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \text{ ou bien } A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ avec } b \neq 0 .$$

Dans le premier cas, A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée (d'après le théorème spectral) et A vérifie (C_4).

Dans le second cas, on a $a^2 + b^2 \geq b^2 > 0$, donc on peut poser $r = \sqrt{a^2+b^2} > 0$, $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$, et :

$$A = rR(\theta) .$$

Donc, A est directement de la forme voulue, donc vérifie (C_4). Finalement, pour $n = 2$:

$$\boxed{\text{Si la matrice } A \text{ vérifie la condition } (C_3)\text{, alors elle vérifie la condition } (C_4).}$$

8. On revient au cas générale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie (C_3), soit $\left\|{}^tAX\right\| = \left\|AX\right\|$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On a alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \left\|{}^tAX - \lambda X\right\|^2 &= {}^t({}^tAX - \lambda X)({}^tAX - \lambda X) = ({}^tXA - \lambda\,{}^tX)({}^tAX - \lambda X) \\ &= {}^tXA\,{}^tAX - \lambda\,{}^tXAX - \lambda\,{}^tX\,{}^tAX + \lambda^2\,{}^tXX \\ &= \left\|{}^tAX\right\|^2 - \lambda({}^tXAX + {}^tX\,{}^tAX) + \lambda^2\left\|X\right\|^2 \end{aligned}$$

Et de même, $\left\|AX - \lambda X\right\|^2 = \left\|AX\right\|^2 - \lambda({}^tX\,{}^tAX + {}^tXAX) + \lambda^2\left\|X\right\|^2$. Comme $\left\|{}^tAX\right\|^2 = \left\|AX\right\|^2$, on obtient :

$$\left\|{}^t(A - \lambda I_n)X\right\|^2 = \left\|({}^tA - \lambda I_n)X\right\|^2 = \left\|{}^tAX - \lambda X\right\|^2 = \left\|AX - \lambda X\right\|^2 = \left\|(A - \lambda I_n)X\right\|^2 .$$

Ceci étant vrai pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\boxed{A - \lambda I_n \text{ vérifie } (C_3).}$$

9. On a :

$$\chi_{{}^tA} = \det(XI_n - {}^tA) = \det\left[{}^t(XI_n - A)\right] = \det(XI_n - A) = \chi_A .$$

Donc :

$$Sp({}^tA) = Sp(A) .$$

De plus, pour tout $\lambda \in Sp({}^tA) = Sp(A)$, on a :

$$\begin{aligned} X \in \ker({}^tA - \lambda I_n) \quad &\Leftrightarrow \quad {}^tAX - \lambda X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\|{}^tAX - \lambda X\right\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\|AX - \lambda X\right\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad AX - \lambda X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X \in \ker(A - \lambda I_n) \end{aligned}$$

Donc, $\ker({}^tA - \lambda I_n) = \ker(A - \lambda I_n)$ et ainsi :

$$\boxed{{}^tA \text{ et } A \text{ ont les mêmes sous-espaces propres.}}$$

Soit $\lambda, \mu \in Sp(A)$ avec $\lambda \neq \mu$, $X \in \ker(A-\lambda I_n)$ et $X' \in \ker(A-\mu I_n)$.

On a $X \in \ker(A-\lambda I_n)$, donc $AX = \lambda X$ et $X' \in \ker(A-\lambda I_n) = \ker({}^tA-\lambda I_n)$, donc ${}^tAX' = \mu X'$. Alors :

$$\lambda(X \mid X') = \lambda\, {}^tXX' = {}^t(\lambda X)X' = {}^t(AX)X' = ({}^tX\,{}^tA)X' = {}^tX({}^tAX') = {}^tX(\mu X') = \mu\, {}^tXX' = \mu(X \mid X').$$

Donc $(\lambda-\mu)(X \mid X') = 0$ et comme $\lambda \neq \mu$, on obtient $(X \mid X') = 0$. Ceci étant vrai pour tous $X \in \ker(A-\lambda I_n)$ et $X' \in \ker(A-\mu I_n)$, on en conclut que $\ker(A-\lambda I_n)$ et $\ker(A-\mu I_n)$ sont orthogonaux et donc :

$$\boxed{\text{Les sous-espaces propres de } {}^tA \text{ et } A \text{ sont orthogonaux deux à deux.}}$$

10. Supposons que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elle possède alors au moins une valeur propre réelle. Notons $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$ (le spectre réel) et pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, $E_i = \ker(A-\lambda_i I_n)$ le sous-espace propre associé à λ_i. Comme A est diagonalisable, on a $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_d$ et, d'après la question précédente, cette somme est orthogonale.

Ainsi, en prenant une base orthonormée $\mathcal{B}_i$ de chaque E_i, la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_d$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et donc, si A est diagonalisable, elle l'est dans une base orthonormée.

Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}$ (toutes deux orthonormées), alors P est orthogonale et :

$$A = PD\,{}^tP$$

où D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, comptées avec leur ordre de multiplicité dans le polynôme caractéristique de A.

Alors, ${}^tA = {}^t(PD\,{}^tP) = {}^t({}^tP)\,{}^tD\,{}^tP = PD\,{}^tP = A$ et donc A est symétrique.

Respectivement, d'après le théorème spectral, si A est symétrique (réelle), alors elle est diagonalisable (dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$).

Finalement :

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ si et seulement elle est symétrique.}}$$

11. On prend $n \geq 3$.

Notons u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à A et ${}^tA$ respectivement.

D'après le théorème 1 rappelé au début de l'énoncé, il existe une droite ou un plan F stable par u.

Soit $\mathcal{B}_F = (e_1)$ ou $\mathcal{B}_F = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de F, que l'on complète en une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0_{n-p,p} & A_2 \end{pmatrix}$$

avec $p = 1$ quand F est une droite, $p = 2$ quand F est un plan, $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ et $A_3 \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$.

Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}$, on a $P \in O(n)$ et :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = {}^tPAP$$

Et :

$${}^tM_{\mathcal{B}}(u) = {}^t({}^tPAP) = {}^tP\,{}^tAP = M_{\mathcal{B}}(v).$$

Donc, $M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} {}^tA_1 & 0_{p,n-p} \\ {}^tA_3 & {}^tA_2 \end{pmatrix}$.

Or, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\left\|{}^tAX\right\| = \|AX\|$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|v(x)\| = \|u(x)\|$.

- Si $p=1$, on a $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{1,2} & & & \\ \vdots & & {}^tA_2 & \\ \alpha_{1,n} & & & \end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{cases} u(e_1) = ae_1 \\ v(e_1) = ae_1 + \alpha_{1,2}e_2 + \ldots + \alpha_{1,n}e_n \end{cases}$$

  Et :

  $$\|v(e_1)\| = \|u(e_1)\| \iff a^2 = a^2 + \alpha_{1,2}^2 + \ldots + \alpha_{1,n}^2 \iff \alpha_{1,2}^2 + \ldots + \alpha_{1,n}^2 = 0 \iff \alpha_{1,2} = \ldots = \alpha_{1,n} = 0.$$

  Donc, $A_3 = 0_{1,n-1}$.

- Si $p=2$, on a $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & b & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ c & d & \beta_{1,3} & \cdots & \beta_{1,n} \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 \\ b & d & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{1,3} & \beta_{1,3} & & & \\ \vdots & \vdots & & {}^tA_2 & \\ \alpha_{1,n} & \beta_{1,n} & & & \end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{cases} u(e_1) = ae_1 + ce_2 \\ v(e_1) = ae_1 + be_2 + \alpha_{1,3}e_3 + \ldots + \alpha_{1,n}e_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(e_2) = be_1 + de_2 \\ v(e_2) = ce_1 + de_2 + \beta_{1,3}e_3 + \ldots + \beta_{1,n}e_n \end{cases}$$

  Et :

  $$\begin{cases} \|v(e_1)\| = \|u(e_1)\| \\ \|v(e_2)\| = \|u(e_2)\| \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + c^2 = a^2 + b^2 + \alpha_{1,3}^2 + \ldots + \alpha_{1,n}^2 \\ b^2 + d^2 = c^2 + d^2 + \beta_{1,3}^2 + \ldots + \beta_{1,n}^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_{1,3}^2 + \ldots + \alpha_{1,n}^2 = c^2 - b^2 \\ \beta_{1,3}^2 + \ldots + \beta_{1,n}^2 = -(c^2 - b^2) \end{cases}$$

  Comme $\alpha_{1,3}^2 + \ldots + \alpha_{1,n}^2 \geq 0$ et $\beta_{1,3}^2 + \ldots + \beta_{1,n}^2 \geq 0$, ceci donne :

  $$\begin{cases} c^2 - b^2 = 0 \\ \alpha_{1,3}^2 + \ldots + \alpha_{1,n}^2 = 0 \\ \beta_{1,3}^2 + \ldots + \beta_{1,n}^2 = 0 \end{cases}$$

  Donc, $\alpha_{1,3} = \ldots = \alpha_{1,n} = \beta_{1,3} = \ldots = \beta_{1,n} = 0$ et donc à nouveau $A_3 = 0_{2,n-2}$.

Finalement, dans les deux cas :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = {}^tPAP = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & A_2 \end{pmatrix} = B.$$

Remarquons alors que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\left\|{}^tBX\right\|^2 = {}^t\left({}^tBX\right)\left({}^tBX\right) = {}^tXB\,{}^tBX = {}^tX\,({}^tPAP)\,{}^t\left({}^tPAP\right)X$$
$$= {}^tX\,{}^tPAP\,{}^tP\,{}^tAPX = {}^t\left({}^tA(PX)\right)\left({}^tA(PX)\right) = \left\|{}^tA(PX)\right\|^2$$

$$\left\|BX\right\|^2 = {}^t\left(BX\right)BX = {}^tX\,{}^tBBX = {}^tX\,{}^t\left({}^tPAP\right)({}^tPAP)X$$
$$= {}^tX\,{}^tP\,{}^tAP\,{}^tPAPX = {}^t\left(A(PX)\right)\left(A(PX)\right) = \left\|A(PX)\right\|^2$$

Or, A vérifie (C$_3$), donc $\left\|{}^tA(PX)\right\| = \left\|A(PX)\right\|$ et ainsi, $\left\|{}^tBX\right\| = \left\|BX\right\|$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors pour tout $(X_1, X_2) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-p,1}(\mathbb{R})$, on a en posant $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$BX = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1X_1 \\ A_2X_2 \end{pmatrix}.$$

Et comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a :

$$\left\|BX\right\|^2 = \left\|A_1X_1\right\|^2 + \left\|A_2X_2\right\|^2.$$

De même, $\left\|{}^tBX\right\|^2 = \left\|{}^tA_1X_1\right\|^2 + \left\|{}^tA_2X_2\right\|^2$ et ainsi, pour tout $(X_1, X_2) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-p,1}(\mathbb{R})$:

$$\left\|A_1X_1\right\|^2 + \left\|A_2X_2\right\|^2 = \left\|{}^tA_1X_1\right\|^2 + \left\|{}^tA_2X_2\right\|^2.$$

En prenant $X_2 = 0_{n-p,1}$, on obtient $\left\|A_1X_1\right\|^2 = \left\|{}^tA_1X_1\right\|^2$ pour tout $X_1 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, donc A_1 vérifie (C$_3$) et en prenant $X_1 = 0_{p,1}$, on obtient $\left\|A_2X_2\right\|^2 = \left\|{}^tA_2X_2\right\|^2$ pour tout $X_2 \in \mathcal{M}_{n-p,1}(\mathbb{R})$, donc A_2 vérifie (C$_3$).

Finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l} A \text{ est orthogonalement semblable à une matrice du type } \begin{pmatrix} A_1 & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & A_2 \end{pmatrix} \\ \text{où } A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \text{ et } A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R}) \text{ vérifie (C}_3\text{).} \end{array}}$$

12. Montrons par récurrence forte sur $n \geq 2$ que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie (C$_3$), alors elle vérifie (C$_4$).

D'après la question **7**, la propriété est vraie au rang $n = 2$.

Supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant (C$_3$).

Comme $n+1 \geq 3$, d'après la question précédente, il existe un entier $p \in [\![1, n]\!]$ et deux matrices $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n+1-p}(\mathbb{R})$ vérifiant (C$_3$) et telles que A est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} A_1 & 0_{p,n+1-p} \\ 0_{n+1-p,p} & A_2 \end{pmatrix}$.

Or, $p \in [\![1, n]\!]$, donc $n+1-p \in [\![1, n]\!]$ et par hypothèse de récurrence, A_1 et A_2 vérifient (C$_4$).

Ainsi, il existe $Q_1 \in O(p)$ et $Q_2 \in O(n+1-p)$ telles que $A_1 = Q_1 B_1 {}^t Q_1$ et $A_2 = Q_2 B_2 {}^t Q_2$ où $B_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $B_2 \in \mathcal{M}_{n+1-p}(\mathbb{R})$ sont des matrices diagonales par blocs, dont chaque bloc diagonal est soit de taille 1×1, soit de taille 2×2, du type $rR(\theta)$, où $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Posons :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0_{p,n+1-p} \\ 0_{n+1-p,p} & Q_2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_1 & 0_{p,n+1-p} \\ 0_{n+1-p,p} & B_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice B est diagonale par blocs, où chaque bloc est soit de taille 1×1, soit de taille 2×2, du type $rR(\theta)$, où $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. De plus :

$$Q\,{}^tQ = \begin{pmatrix} Q_1 & 0_{p,n+1-p} \\ 0_{n+1-p,p} & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tQ_1 & 0_{p,n+1-p} \\ 0_{n+1-p,p} & {}^tQ_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1\,{}^tQ_1 & 0_{p,n+1-p} \\ 0_{n+1-p,p} & Q_2\,{}^tQ_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p,n+1-p} \\ 0_{n+1-p,p} & I_{n+1-p} \end{pmatrix} = I_{n+1}.$$

Donc $Q \in O(n+1)$.

Enfin :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0_{p,n+1-p} \\ 0_{n+1-p,p} & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 B_1\,{}^tQ_1 & 0_{p,n+1-p} \\ 0_{n+1-p,p} & Q_2 B_2\,{}^tQ_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 & 0_{p,n+1-p} \\ 0_{n+1-p,p} & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & 0_{p,n+1-p} \\ 0_{n+1-p,p} & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tQ_1 & 0_{p,n+1-p} \\ 0_{n+1-p,p} & {}^tQ_2 \end{pmatrix} = QB\,{}^tQ$$

.

Ainsi, A **ORST** à $\begin{pmatrix} A_1 & 0_{p,n+1-p} \\ 0_{n+1-p,p} & A_2 \end{pmatrix}$, qui est **ORST** à B. Comme la relation **ORST** est transitive (d'après la question **1**), A **ORST** à B, qui a la forme voulue dans la condition (C_4) et donc, A vérifie (C_4).

La propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout entier $n \geq 2$ et ainsi :

Si la matrice A vérifie la condition (C_3), alors elle vérifie la condition (C_4).

V. La condition (C_4) implique la condition (C_1)

13. Supposons l'existence de $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $P(z_k) = \overline{z}_k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

Les a_k sont alors solutions du système :

$$(S) : \begin{cases} a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + \ldots + a_{n-1} z_1^{n-1} = \overline{z}_1 \\ a_0 + a_1 z_2 + a_2 z_2^2 + \ldots + a_{n-1} z_2^{n-1} = \overline{z}_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 z_n + a_2 z_n^2 + \ldots + a_{n-1} z_n^{n-1} = \overline{z}_n \end{cases} \Leftrightarrow \quad V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ \overline{z}_2 \\ \overline{z}_3 \\ \vdots \\ \overline{z}_n \end{pmatrix} \text{ avec } V = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ 1 & z_3 & z_3^2 & \cdots & z_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Or, les z_k sont deux à deux distincts donc le déterminant la matrice de Vandermonde V est non nul et cette matrice est inversible.

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ \overline{z}_2 \\ \overline{z}_3 \\ \vdots \\ \overline{z}_n \end{pmatrix}.$$

Donc, P est unique.

Réciproquement, si on prend $P = a_0 + a_1 X + ... + a_{n-1} X^{n-1}$ avec les a_k définis comme ci-dessus sont solutions de (S) et on a bien pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $P(z_k) = a_0 + a_1 z_k + a_2 z_k^2 + ... + a_{n-1} z_k^{n-1} = \overline{z}_k$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe un unique } P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \text{ tel que } P(z_k) = \overline{z}_k \text{ pour tout } k \in [\![1,n]\!].}$$

On suppose que $\overline{z}_k \in \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

Alors, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe $i_k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\overline{z}_k = z_{i_k}$ (et donc $z_k = \overline{z}_{i_k}$).

Si on note $\overline{P} = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 X + ... + \overline{a}_{n-1} X^{n-1}$, on a :

$$P(z_{i_k}) = \overline{z}_{i_k} = z_k \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P(z_{i_k})} = z_{i_k} = \overline{z}_k \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P}(\overline{z}_{i_k}) = \overline{P}(z_k) = \overline{z}_k.$$

Ainsi, $\overline{P} \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ vérifie $\overline{P}(z_k) = \overline{z}_k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, autrement les mêmes hypothèses que *P*. Or, il n'existe qu'un seul polynôme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ vérifiant ces hypothèses : *P*.

Donc, $\overline{P} = P$, soit pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\overline{a}_k = a_k$, donc $a_k \in \mathbb{R}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Si } \overline{z}_k \in \{z_1, z_2, ..., z_n\} \text{ pour tout } k \in [\![1,n]\!], \text{ le polynôme } P \text{ est réel.}}$$

14. On a $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et :

$$\chi_{R(\theta)} = \begin{vmatrix} X - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & X - \cos\theta \end{vmatrix} = (X - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}).$$

Si $e^{i\theta} = e^{-i\theta}$, alors $\sin\theta = 0$ et $R(\theta)$ est diagonale (et même scalaire, égale à $\pm I_2$).

Si $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$, alors $\chi_{R(\theta)}$ est scindé à racines simples, donc $R(\theta)$ est diagonalisable, donc il existe $Q \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $R(\theta) = QDQ^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$. De plus :

$$\ker\left(R(\theta) - e^{i\theta} I_2\right) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right] \text{ et } \ker\left(R(\theta) - e^{i\theta} I_2\right) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}\right].$$

Donc, on peut prendre $Q = \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et alors $Q^{-1} = \dfrac{1}{-2i}\begin{pmatrix} -1 & -i \\ -1 & i \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -i & -1 \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$P\left(rR(\theta)\right)=P\left(rQDQ^{-1}\right)=P\left(Q(rD)Q^{-1}\right)=Q\left[P(rD)\right]Q^{-1}.$$

Et comme $rD=\begin{pmatrix} re^{i\theta} & 0 \\ 0 & re^{-i\theta}\end{pmatrix}$, on a :

$$P(rD)=\begin{pmatrix} P(re^{i\theta}) & 0 \\ 0 & P(re^{-i\theta})\end{pmatrix}.$$

Or, $P(re^{i\theta})=re^{-i\theta}$, et comme P est réel, $\overline{P}=P$ et :

$$\overline{P(re^{i\theta})}=\overline{re^{-i\theta}} \quad\Leftrightarrow\quad \overline{P}(\overline{re^{i\theta}})=P(re^{-i\theta})=re^{i\theta}.$$

Ainsi :

$$P(rD)=\begin{pmatrix} re^{-i\theta} & 0 \\ 0 & re^{i\theta}\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$P\left(rR(\theta)\right)=Q\left[P(rD)\right]Q^{-1}=r\begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -i & -1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}r\begin{pmatrix} e^{-i\theta}+e^{i\theta} & i(e^{-i\theta}-e^{i\theta}) \\ i(e^{i\theta}-e^{-i\theta}) & e^{-i\theta}+e^{i\theta}\end{pmatrix}.$$

Soit :

$$P\left(rR(\theta)\right)=r\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=r\,{}^tR(\theta)={}^t\left(rR(\theta)\right).$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{P\left(rR(\theta)\right)={}^t\left(rR(\theta)\right)}$$

Plan B (en suivant l'indication de l'énoncé !)

On a vu sur $\chi=\chi_{rR(\theta)}=(X-r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta=(X-re^{i\theta})(X-re^{-i\theta})\in\mathbb{R}_2[X]$.

Comme $P\in\mathbb{R}[X]$, la division euclidienne de P par χ s'écrit :

$$P=Q\chi+aX+b$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ et $a,b\in\mathbb{R}$.

On a $P(re^{i\theta})=re^{-i\theta}$ et $\chi(re^{i\theta})=0$, donc :

$$P(re^{i\theta})=Q(re^{i\theta})\chi(re^{i\theta})+are^{i\theta}+b=are^{i\theta}+b=re^{-i\theta}.$$

Soit (avec *r*, *a* et *b* réels) :

$$\begin{cases} ar\cos\theta+b=r\cos\theta \\ ar\sin\theta=-r\sin\theta\end{cases}$$

Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi\left(rR(\theta)\right)=0_2$, donc :

$$\begin{aligned} P\left(rR(\theta)\right)&=Q\left(rR(\theta)\right)\chi\left(rR(\theta)\right)+arR(\theta)+bI_2=arR(\theta)+bI_2\\ &=\begin{pmatrix} ar\cos\theta+b & -ar\sin\theta \\ ar\sin\theta & ar\cos\theta+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{P\left(rR(\theta)\right)={}^t\left(rR(\theta)\right)}$$

15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la condition (C_4).

Notons $z_1, z_2, \dots, z_d$ les valeurs propres réelles ou complexes distinctes de A. Ce sont les racines du polynôme caractéristique χ_A de A, qui est à coefficients réels (car A est réelle). Or, si un nombre complexe est racine d'un polynôme réel, alors son conjugué l'est aussi, et ainsi, pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, $\overline{z_k} \in \{z_1, z_2, \dots, z_d\}$.

D'après la question **13**, il existe alors $P \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1, d]\!]$:

$$P(z_k) = \overline{z_k}.$$

Par ailleurs, A vérifie (C_4), donc il existe une matrice $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et des matrices $A_1, A_2, \dots, A_r$ de la forme (α) ou $rR(\theta)$ avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ telles que :

$$A = QB\,{}^tQ$$

où B est la matrice diagonale par blocs $diag\left(A_1, A_2, \dots, A_r\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D'après le **théorème 2** admis dans l'énoncé, on a :

$$P(A) = QP(B)\,{}^tQ.$$

Et :

$$P(B) = P\big(diag\left(A_1, A_2, \dots, A_r\right)\big) = diag\left(P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_r)\right).$$

Remarquons que A et B ont le même spectre (car les matrices sont semblables), soit $\{z_1, z_2, \dots, z_d\}$.

Comme $B = diag\left(A_1, A_2, \dots, A_r\right)$, on a :

$$Sp(A_1) \cup Sp(A_2) \cup \dots \cup Sp(A_r) = Sp(B) = Sp(A) = \{z_1, z_2, \dots, z_d\}.$$

Soit alors $i \in [\![1, r]\!]$.

- Si $A_i = (\alpha)$, alors $\{\alpha\} = Sp(A_i) \subset \{z_1, z_2, \dots, z_d\}$, donc $P(\alpha) = \overline{\alpha} = \alpha$ et :

$$P(A_i) = \big(P(\alpha)\big) = (\alpha) = {}^t(\alpha) = {}^tA_i.$$

- Si $A_i = rR(\theta)$, alors $Sp(A_i) = \{re^{i\theta}, re^{-i\theta}\} \subset Sp(B) = Sp(A) = \{z_1, z_2, \dots, z_d\}$, donc $P(re^{i\theta}) = \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$ et, d'après la question précédente :

$$P(A_i) = P\big(rR(\theta)\big) = {}^t\big(rR(\theta)\big) = {}^tA_i.$$

Dans tous les cas, $P(A_i) = {}^tA_i$, donc :

$$P(B) = diag\left(P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_r)\right) = diag\left({}^tA_1, {}^tA_2, \dots, {}^tA_r\right) = {}^t\big(diag\left(A_1, A_2, \dots, A_r\right)\big) = {}^tB.$$

Enfin :

$$P(A) = QP(B)\,{}^tQ = Q\,{}^tB\,{}^tQ = {}^t\big(QB\,{}^tQ\big) = {}^tA.$$

Ainsi, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = {}^tA$, autrement dit :

$$\boxed{\text{Si une matrice } A \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ vérifie la condition (C}_4\text{), alors elle vérifie la condition (C}_1\text{).}}$$