

DM de Mathématiques n° 7

Exercice 1

Un site marchand sur internet possède un service de fraude pour contrôler l'authenticité d'une commande. En effet, 5 % des commandes passées sur le site se révèlent être frauduleuses (carte de crédit volée, usurpation d'identité, etc.).

L'équipe du service de fraude du site est composée de deux personnes : Marcel et Gontran. Marcel, plus ancien dans le service, étudie 60 % des commandes passées et Gontran les autres. Cette répartition étant faite au hasard, une commande est traitée par Marcel ou Gontran indépendamment de son caractère frauduleux ou pas.

Comme il est habitué, Marcel détecte 90 % des commandes frauduleuses, mais, revers de la médaille, il va vite et se trompe une fois sur cinq sur les commandes honnêtes. Nouvel arrivant dans le service, Gontran ne repère que 75 % des commandes frauduleuses. Cependant, plus méticuleux que Marcel, il valide 85 % des commandes honnêtes.

- a) Quelle est la probabilité qu'une commande soit jugée correctement par le service ?
- b) Marcel vient de valider une commande. Quelle est la probabilité qu'il ait eu tort ?

Exercice 2

On pioche au hasard 3 atouts parmi les 21 atouts d'un jeu de tarot (cartes numérotées de 1 à 21).

- a) Quelle est la probabilité des évènements suivants :
 - Aucune carte n'est multiple de 5.
 - Au moins une carte est multiple de 5.
 - Exactement une carte est multiple de 5.
- b) On retourne une des trois cartes choisies, c'est un multiple de 5. Quelle est la probabilité d'en avoir un autre.
- c) On retourne une des trois cartes choisies, ce n'est pas un multiple de 5. On en pioche alors une autre, quelle est la probabilité que la nouvelle carte soit un multiple de 5.

Exercice 3

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant une même loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ où n est un entier supérieur ou égal à 2. On pose $S = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$.

- a) Calculer l'espérance et la variance de X et Y .
- b) Déterminer la loi du couple (S, X) .
- c) En déduire la loi de S . Donner son espérance et sa variance.
- d) Déterminer $E(T)$ et $E(ST)$ sans calculs supplémentaires.
- e) Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 4

Soient r et n deux entiers naturels tels que $1 \leq r \leq n$. Un placard contient n paires de chaussures. On tire au hasard, $2r$ chaussures du placard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de paires complètes parmi les chaussures tirées. Les paires du placard sont numérotées de 1 à n . Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si les deux chaussures de la paire n° i se trouvent parmi les chaussures tirées, et 0 sinon.

- a) Déterminer la loi de X_i et démontrer que $E(X_i) = \frac{r(2r-1)}{n(2n-1)}$.
- b) Exprimer X en fonction des X_i , en déduire $E(X)$.