

Corrigé du DS n° 5 - Centrale PSI - 2021 - Maths 2
Autour des fonctions hypergéométriques
I - Suites et séries hypergéométriques

Q1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q .

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $qu_n = u_{n+1}$, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est hypergéométrique avec $P = q$ et $Q = 1$ (polynômes constants). Ainsi :

Toute suite géométrique est hypergéométrique.

Q2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \binom{n}{p}$ (avec par convention $u_n = 0$ quand $n < p$).

Pour tout entier $n \geq p$, on a :

$$u_{n+1} = \binom{n+1}{p} = \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!p!} = \frac{(n+1)}{n+1-p} \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n+1}{n+1-p} \binom{n}{p} = \frac{n+1}{n+1-p} u_n.$$

Donc :

$$(n+1-p)u_{n+1} = (n+1)u_n.$$

Quand $n < p-1$ (s'il y a lieu), la relation reste vraie ($0 = 0$) et elle reste vraie aussi pour $n = p-1$, car on a bien $((p-1)+1-p)u_{(p-1)+1} = 0 = ((p-1)+1)u_{p-1}$ (avec $u_{p-1} = 0$).

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}$ avec $P = X + 1$ et $Q = X + 1 - p$, et donc :

 La suite de terme général $u_n = \binom{n}{p}$ est hypergéométrique.

Q3. Soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}\}$ avec $P = X(X-1)(X-2)$ et $Q = X(X-2)$.

Soit $u \in E$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n(n-1)(n-2)u_n = n(n-2)u_{n+1} \quad (1)$$

Si $n \geq 3$ (donc $n \neq 0$ et $n \neq 2$), on obtient $u_{n+1} = (n-1)u_n$, donc :

$$\frac{u_{n+1}}{(n-1)!} = \frac{(n-1)u_n}{(n-1)!} = \frac{u_n}{(n-2)!}.$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{u_n}{(n-2)!}\right)_{n \geq 3}$ est constante, soit $\frac{u_n}{(n-2)!} = \frac{u_3}{1}$ pour tout entier $n \geq 3$. Donc, pour $n \geq 3$:

$$u_n = u_3 \omega_n$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et où ω est la suite réelle définie par $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 0$ et pour tout entier $n \geq 3$, $\omega_n = (n-2)!$.

De plus, pour $n = 1$, (1) donne $0 = -u_2$, soit $u_2 = 0$.

Si on note $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker ($\delta_{i,j} = 1$ quand $i = j$ et 0 sinon), $\delta_0 = (\delta_{0,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $\delta_1 = (\delta_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$, on a alors $u = u_0\delta_0 + u_1\delta_1 + u_3\omega \in \text{Vect}(\delta_0, \delta_1, \omega)$.

Réciproquement, si $u \in \text{Vect}(\delta_0, \delta_1, \omega)$, on a alors $u = a\delta_0 + b\delta_1 + c\omega$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n(n-1)(n-2)u_n = \begin{cases} 0 & \text{quand } n \in \{0, 1, 2\} \\ n(n-1)(n-2)c\omega_n = cn(n-1)(n-2)(n-2)! = c(n-2)n! & \text{quand } n \geq 3 \end{cases}$$

$$n(n-2)u_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{quand } n \in \{0, 2\} \\ -u_2 = 0 & \text{quand } n = 1 \\ n(n-2)c\omega_{n+1} = cn(n-2)(n-1)! = c(n-2)n! & \text{quand } n \geq 3 \end{cases}$$

Ainsi, $n(n-1)(n-2)u_n = n(n-2)u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u \in E$.

On obtient alors :

$$E = \text{Vect}(\delta_0, \delta_1, \omega).$$

Notons enfin que si avec a, b, c sont trois réels tels que $a\delta_0 + b\delta_1 + c\omega = 0$, alors en évaluant en $n = 0$, $n = 1$ et $n = 3$, on obtient successivement $a = 0$, $b = 0$ et $c = 0$. La famille $(\delta_0, \delta_1, \omega)$ est donc libre.

Finalement, avec $P = X(X-1)(X-2)$ et $Q = X(X-2)$, et en notant $\delta_0 = (\delta_{0,n})_{n \in \mathbb{N}}$, $\delta_1 = (\delta_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et ω la suite réelle définie par $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 0$ et pour tout entier $n \geq 3$, $\omega_n = (n-2)!$, on peut conclure que :

$$E = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, P(n)u_n = Q(n)u_{n+1} \right\} \text{ est un espace vectoriel de base } (\delta_0, \delta_1, \omega) \text{ et de dimension 3.}$$

Q4. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0) = 0$ et $Q(n) \neq 0$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Prouvons par récurrence sur n que pour tout entier $n \geq n_0 + 1$, on a $u_n = 0$.

- On a $P(n_0)u_{n_0} = 0 = Q(n_0)u_{n_0+1}$ et $Q(n_0) \neq 0$, donc $u_{n_0+1} = 0$ et la propriété est vraie au rang $n = n_0 + 1$.
- Supposons la propriété vraie au rang $n \geq n_0 + 1$.

Par hypothèse de récurrence, $u_n = 0$. Or, $P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}$ et comme $n \geq n_0 + 1$, $Q(n) \neq 0$, donc :

$$u_{n+1} = \frac{P(n)}{Q(n)}u_n = \frac{P(n)}{Q(n)} \times 0 = 0.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Finalement, la propriété est initialisée au rang $n_0 + 1$ et héréditaire, donc vraie pour tout $n \geq n_0 + 1$. Autrement dit :

$$\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est nulle à partir du rang } n_0 + 1.$$

II - Extension de la factorielle

Q5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* en tant que produit de telles fonctions.

De plus :

- $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$ et l'intégrale de Riemann $\int_0^1 t^{x-1} dt$ converge car $x-1 > -1$, donc $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t} dt$ converge ;
- $t^{x-1}e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} (e^{-t/2})$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge, donc $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$ converge.

Finalement, quel que soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$ converge, donc :

Γ est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

Q6. On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue, donc continue par morceaux sur \mathbb{R}_+^* (en tant que produit de telles fonctions).
- Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto t^{x-1}e^{-t} = t^{-1}e^{-t}e^{x \ln t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* (car elle est proportionnelle à une fonction exponentielle).
- Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a \leq b$. Pour tout $(x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$|t^{x-1}e^{-t}| \leq \varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{quand } t \leq 1 \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{quand } t > 1 \end{cases}.$$

La fonction φ est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+^* . De plus :

- $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{a-1}$ et $t \mapsto t^{a-1}$ est intégrable en 0 car $a-1 > -1$, donc φ est intégrable en 0 ;
- $\varphi(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ car, par croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{b+1}e^{-t} = 0$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, donc φ est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, φ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Tout ceci permet de conclure que $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$ est continue sur $[a, b]$.

Ceci étant vrai pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a \leq b$, Γ est continue sur tout segment de \mathbb{R}_+^* , donc :

Γ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et strictement positive sur \mathbb{R}_+^* , donc par positivité de l'intégrale, on a $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt \geq 0$ et $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt \neq 0$, sinon la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ serait nulle sur \mathbb{R}_+^* .

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt > 0$, autrement dit :

Γ est strictement positive sur \mathbb{R}_+^* .

Q7. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* , donc pour tout $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ on peut procéder à l'intégration par parties :

$$\int_a^b t^x e^{-t} dt = \left[t^x (-e^{-t}) \right]_a^b - \int_a^b x t^{x-1} (-e^{-t}) dt = a^x e^{-a} - b^x e^{-b} + x \int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Comme $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x+1 \in \mathbb{R}_+^*$, donc les intégrales $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et $\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$ convergent et on a aussi $\lim_{a \rightarrow 0} a^x e^{-a} = \lim_{b \rightarrow +\infty} b^x e^{-b} = 0$ (la première car $x > 0$, la seconde par croissances comparées). En passant aux limites que $a \rightarrow 0$ et $b \rightarrow +\infty$ dans la relation ci-dessus, on obtient alors $\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, soit pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Q8. On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{+\infty} = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, soit en divisant par $n!$:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{n!} = \frac{n\Gamma(n)}{n!} = \frac{\Gamma(n)}{(n-1)!}.$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{\Gamma(n)}{(n-1)!} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\Gamma(n)}{(n-1)!} = \frac{\Gamma(1)}{(1-1)!} = 1.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

On admet qu'on peut prolonger la fonction Γ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-n, n \in \mathbb{N}\}$ en une fonction continue, toujours notée Γ , qui vérifie la relation (II.1) ci-dessus sur D tout entier.

III - Fonctions hypergéométriques

III.A – Symbole de Pochhammer

Pour tous $a, n \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on pose :

$$[a]_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a(a+1)\dots(a+n-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Q9. Posons $a = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$. On alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 \geq p$:

$$[a]_n = a(a+1)\dots(a+p)\dots(a+n-1) = a(a+1)\dots(-p+p)\dots(a+n-1) = 0.$$

Donc :

Si a est un entier négatif ou nul, la suite $\left([a]_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang $-a+1$.

Q10. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a $a[a+1]_0 = a = [a]_1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a[a+1]_n = a \prod_{k=0}^{n-1} ((a+1)+k) = a \prod_{k=0}^{n-1} (a+k+1) = a \prod_{k=1}^n (a+k) = \prod_{k=0}^n (a+k) = [a]_{n+1}.$$

Donc, pour $a \in \mathbb{R}$ donné, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{[a]_{n+1} = a[a+1]_n}$$

Q11. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$[a]_n = \prod_{k=0}^{n-1} (a+k) = \prod_{k=a}^{a+n-1} k = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}.$$

Cette expression reste cohérente pour $n=0$ (avec $[a]_0 = 1$), donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{[a]_n = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!} \text{ quand } a \in \mathbb{N}^* .}$$

Comme $\Gamma(k) = (k-1)!$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, la relation ci-dessus se réécrit $[a]_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ quand $a \in \mathbb{N}^*$.

Ceci nous invite à calculer $\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ pour $a \in D$ (si cela est possible, autrement dit, si $\Gamma(a) \neq 0$).

Soit $a \in D$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a+n \in D$, sinon on aurait $-(a+n) \in \mathbb{N}$, d'où $-a = -(a+n) + n \in \mathbb{N}$: absurde.

On a de même $a+n+1 \in D$ et on peut alors écrire :

$$\Gamma(a+n+1) = (a+n)\Gamma(a+n).$$

Or, comme $-a \notin \mathbb{N}$, on a $a+k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $[a]_n = \prod_{k=0}^{n-1} (a+k) \neq 0$ et aussi

$[a]_0 = 1 \neq 0$. De même $[a]_{n+1} \neq 0$ et on peut alors écrire :

$$\frac{\Gamma(a+n+1)}{[a]_{n+1}} = \frac{(a+n)\Gamma(a+n)}{(a+n)[a]_n} = \frac{\Gamma(a+n)}{[a]_n}.$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{\Gamma(a+n)}{[a]_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\Gamma(a+n)}{[a]_n} = \frac{\Gamma(a)}{[a]_0} = \Gamma(a).$$

Si $\Gamma(a) = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(a+n) = [a]_n \Gamma(a) = 0$.

En particulier pour $N = \lfloor |a| \rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(a+N) = 0$. Or, on a $-a \leq |a| < \lfloor |a| \rfloor + 1 = N$, donc $a+N > 0$ et d'après la question **Q6**, $\Gamma(a+N) > 0$. Ainsi, $\Gamma(a) = 0$ mène à une absurdité, donc $\Gamma(a) \neq 0$.

Finalement, on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{[a]_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \text{ quand } a \in D .}$$

III.B – Fonction hypergéométrique de Gauss

Q12. Soient trois réels a, b et c , et un entier naturel n .

Les nombres $[a]_n, [b]_n$ et $[c]_n$ sont toujours bien définis et si $c \in D$, on a vu dans la question précédente que $[c]_n \neq 0$, donc :

Si $c \in D$, $\frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n}$ est bien défini pour tout entier naturel n .

Dans les questions suivantes, a, b et c sont trois réels tels que $c \in D$.

Q13. Par définition, la série entière $\sum \frac{[a]_n [b]_n x^n}{[c]_n n!}$ est hypergéométrique si la suite $\left(\frac{[a]_n [b]_n 1}{[c]_n n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{[a]_{n+1} [b]_{n+1}}{[c]_{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} = \frac{(a+n)[a]_n (b+n)[b]_n}{(c+n)[c]_n} \frac{1}{n!(n+1)} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} \frac{[a]_n [b]_n 1}{[c]_n n!}.$$

Donc :

$$P(n) \frac{[a]_n [b]_n 1}{[c]_n n!} = Q(n) \frac{[a]_{n+1} [b]_{n+1}}{[c]_{n+1}} \frac{1}{(n+1)!}.$$

avec $P = (X+a)(X+b)$ et $Q = (X+c)(X+1)$.

Ainsi, la suite $\left(\frac{[a]_n [b]_n 1}{[c]_n n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est hypergéométrique et finalement :

La série entière $\sum \frac{[a]_n [b]_n x^n}{[c]_n n!}$ est hypergéométrique avec $P = (X+a)(X+b)$ et $Q = (X+c)(X+1)$.

Q14. Pour $P = (X+a)(X+b)$ et $Q = (X+c)(X+1)$, notons $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}\}$ et $F = \{\sum u_n x^n \mid u \in E\}$.

Soit $u \in E$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(c+n)(n+1) \neq 0$ car $-c \notin \mathbb{N}$:

$$P(n)u_n = Q(n)u_{n+1} \Leftrightarrow (a+n)(b+n)u_n = (c+n)(n+1)u_{n+1} \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} u_n.$$

Prouvons alors par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{[a]_n [b]_n 1}{[c]_n n!} u_0$.

- On a $\frac{[a]_0 [b]_0 1}{[c]_0 0!} u_0 = \frac{1 \times 1}{1 \times 1} u_0 = u_0$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$.

Avec la relation de récurrence ci-dessus et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} u_n = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} u_0 \\ &= \frac{(a+n)[a]_n (b+n)[b]_n}{(c+n)[c]_n} \frac{1}{n!(n+1)} u_0 = \frac{[a]_{n+1} [b]_{n+1}}{[c]_{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} u_0 \end{aligned}$$

La relation est donc vérifiée au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors, pour tout $f = \sum u_n x^n \in F$ (avec $u \in E$), on a :

$$f = \sum \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} u_0 x^n = u_0 \sum \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} x^n = u_0 F_{a,b,c}.$$

Ainsi, $f \in \text{Vect}(F_{a,b,c})$ et donc $F \subset \text{Vect}(F_{a,b,c})$.

Réciproquement, on a $F_{a,b,c} \in F$ d'après la question précédente et on vérifie facilement que $\lambda F_{a,b,c} \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $\text{Vect}(F_{a,b,c}) \subset F$.

On a alors :

$$F = \text{Vect}(F_{a,b,c}).$$

Comme $F_{a,b,c}(0) = \frac{[a]_0 [b]_0}{[c]_0} \frac{1}{0!} = 1 \neq 0$, on a $F_{a,b,c} \neq 0$ et finalement :

L'ensemble des séries hypergéométriques associées aux polynômes obtenus à la question précédente est la droite vectorielle dirigée par $F_{a,b,c}$.

Q15. Commençons par remarquer que $[a]_0 = 1 \neq 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $[a]_n = a(a+1)\dots(a+n-1) = 0$ si et seulement s'il existe $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $a+p=0$, soit $a = -p$. Remarquons qu'alors, on a $[a]_n = 0$ pour tout $n > p$. Ainsi, la suite $\left([a]_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ s'annule si et seulement si $a \notin D$, et dans ce cas, $\left([a]_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Alors, si $a \notin D$ ou $b \notin D$, la suite $\left(\frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang, donc le rayon de convergence de $\sum \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} x^n$ est infini.

Supposons maintenant que $a, b \in D$. Alors, la suite $\left(\frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule jamais et :

$$\left| \frac{\frac{[a]_{n+1} [b]_{n+1}}{[c]_{n+1}} \frac{1}{(n+1)!}}{\frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!}} \right| = \left| \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+1)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

D'après la règle de d'Alembert appliquée aux série entières, le rayon de convergence de $\sum \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} x^n$ est alors $\frac{1}{1} = 1$, et finalement :

$$\text{Le rayon de convergence de } \sum \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} x^n \text{ est } R = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in D \text{ et } b \in D \\ +\infty & \text{si } a \notin D \text{ ou } b \notin D \end{cases}$$

Q16. La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence. Comme ici, le rayon de convergence R de $\sum \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1, $] -1, 1[$ est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, et donc la somme $F_{a,b,c}$ de la série entière $\sum \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} x^n$ est C^∞ sur $] -1, 1[$, et entre autres :

$$F_{a,b,c} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }] -1, 1[.$$

On peut de plus dériver terme à terme, soit pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$F_{a,b,c}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a]_{n+1} [b]_{n+1}}{[c]_{n+1}} \frac{1}{n!} x^n.$$

Or, on a vu plus haut (question **Q10**) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[a]_{n+1} = a[a+1]_n$, donc :

$$F_{a,b,c}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a[a+1]_n [b]_{n+1}}{c[c+1]_n} \frac{1}{n!} x^n = \frac{ab}{c} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a+1]_n [b+1]_n}{[c+1]_n} \frac{1}{n!} x^n = \frac{ab}{c} F_{a+1,b+1,c+1}(x).$$

Finalement :

$$F_{a,b,c}' = \frac{ab}{c} F_{a+1,b+1,c+1}$$

Q17. On a justifié ci-dessus que :

$$F_{a,b,c} \text{ est } C^\infty \text{ sur }] -1, 1[.$$

On a $F_{a,b,c}' = \frac{ab}{c} F_{a+1,b+1,c+1}$, donc $F_{a,b,c}'' = \frac{ab}{c} F_{a+1,b+1,c+1}' = \frac{ab}{c} \frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)} F_{a+2,b+2,c+2}, \dots$

Prouvons alors par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$F_{a,b,c}^{(k)} = \frac{ab}{c} \frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)} \dots \frac{(a+k-1)(b+k-1)}{(c+k-1)} F_{a+k,b+k,c+k}.$$

- On vient de voir que la propriété est vraie au rang $k = 1$.

- Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}^*$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$F_{a,b,c}^{(k+1)} = F_{a,b,c}^{(k)'} = \frac{ab}{c} \frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)} \dots \frac{(a+k-1)(b+k-1)}{(c+k-1)} F_{a+k,b+k,c+k}'$$

Et d'après la question précédente, $F_{a+k,b+k,c+k}' = \frac{(a+k)(b+k)}{c+k} F_{a+k+1,b+k+1,c+k+1}$, donc :

$$F_{a,b,c}^{(k+1)} = F_{a,b,c}^{(k)'} = \frac{ab}{c} \frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)} \dots \frac{(a+k-1)(b+k-1)}{(c+k-1)} \frac{(a+k)(b+k)}{c+k} F_{a+k+1,b+k+1,c+k+1}.$$

La formule est donc validée au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{ab}{c} \frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)} \dots \frac{(a+k-1)(b+k-1)}{(c+k-1)} = \frac{a(a+1)\dots(a+k-1) b(b+1)\dots(b+k-1)}{c(c+1)\dots(c+k-1)} = \frac{[a]_k [b]_k}{[c]_k}.$$

Et finalement, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$F_{a,b,c}^{(k)} = \frac{[a]_k [b]_k}{[c]_k} F_{a+k,b+k,c+k}$$

Q18. On a $\left[\frac{1}{2}\right]_0 = [1]_0 = \left[\frac{3}{2}\right]_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}\right]_n &= \frac{1}{2} \frac{3}{2} \dots \frac{2n-1}{2} = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n} = \frac{(2n)!}{2^n \times 2 \times 4 \times \dots \times 2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \\ [1]_n &= n! \\ \left[\frac{3}{2}\right]_n &= \frac{3}{2} \frac{5}{2} \dots \frac{2n+1}{2} = \frac{3 \times \dots \times (2n+1)}{2^n} = \frac{(2n+1)!}{2^n \times 2 \times 4 \times \dots \times 2n} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n} n!} \end{aligned}$$

Les formules ci-dessus restent valables pour $n=0$. Alors, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$F_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left[\frac{1}{2}\right]_n [1]_n}{\left[\frac{3}{2}\right]_n} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{(2n)!}{2^{2n} n!} n!}{\frac{(2n+1)!}{2^{2n} n!}} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}.$$

Et pour tout $x \in]-1,1[$, $-x^2 \in]-1,0[\subset]-1,1[$ et :

$$F_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}.$$

Or, pour tout $x \in]-1,1[$, $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, donc pour tout $x \in]-1,1[\setminus \{0\}$:

$$F_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(x) = \frac{\arctan x}{x}$$

Q19. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$, donc pour tout $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$:

$$-\frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!n!}{(n+1)!n!} \frac{1}{n!} x^n.$$

Remarquons que $[1]_n = n!$ et $[2]_n = (n+1)!$, donc pour tout $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$:

$$\frac{\ln(1-x)}{-x} = -\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[1]_n [1]_n}{[2]_n} \frac{1}{n!} x^n = F_{1,1,2}(x).$$

Alors, pour tout $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = F_{1,1,2}(-x).$$

Et comme $F_{1,1,2}(0) = \frac{[1]_0 [1]_0}{[2]_0} \frac{1}{0!} = 1$, on a pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$F_{1,1,2}(-x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{quand } x \in]-1, 1[\setminus\{0\} \\ 1 & \text{quand } x = 0 \end{cases}$$

Q20. Comme $N \in \mathbb{N}$, on a $-N \notin D$ et le rayon de convergence de $\sum \frac{[a]_n [-N]_n}{[c]_n n!} \frac{1}{n!} x^n$ est infini d'après la question **Q15**. Ainsi :

$$F_{a,-N,c}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a]_n [-N]_n}{[c]_n n!} \text{ existe.}$$

On a de plus :

$$[-N]_n = -N(-N+1)\dots(-N+n-1) = (-1)^n N(N-1)\dots(N-n+1) = \begin{cases} (-1)^n \frac{N!}{(N-n)!} & \text{quand } n \leq N \\ 0 & \text{quand } n \geq N+1 \end{cases}$$

Donc :

$$F_{a,-N,c}(1) = \sum_{n=0}^N \frac{[a]_n (-1)^n \frac{N!}{(N-n)!}}{[c]_n n!} = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{N!}{n!(N-n)!} \frac{[a]_n}{[c]_n} = \sum_{n=0}^N (-1)^n \binom{N}{n} \frac{[a]_n}{[c]_n}.$$

Si $c \in D$ et $c-a \in D$, on a $c+N \in D$ et $c-a+N \in D$, et d'après le résultat admis :

$$F_{a,-N,c}(1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a+N)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c+N)} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+N)} \frac{\Gamma(c-a+N)}{\Gamma(c-a)}.$$

Or, d'après la question **Q11**, on a $[c]_N = \frac{\Gamma(c+N)}{\Gamma(c)}$ et $[c-a]_N = \frac{\Gamma(c-a+N)}{\Gamma(c-a)}$, donc :

$$F_{a,-N,c}(1) = \frac{1}{[c]_N} [c-a]_N.$$

Et finalement :

$$F_{a,-N,c}(\mathbf{1}) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \binom{N}{n} \frac{[a]_n}{[c]_n} = \frac{[c-a]_N}{[c]_N}$$

Q21. Soient $u, v \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \leq \min(u, v)$.

En posant $a = -u$ et $c = v - N + 1$, on a $c \in \mathbb{N}^*$ et $c - a = v + u - N + 1 \in \mathbb{N}^*$ (car u, v et N sont des entiers naturels tels que $v \geq N$). Donc, $N \in \mathbb{N}$, $c \in D$ et $c - a \in D$. On peut utiliser la relation de la question précédente, qui donne :

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n \binom{N}{n} \frac{[-u]_n}{[v-N+1]_n} = \frac{[v+u-N+1]_N}{[v-N+1]_N} \quad (*)$$

Comme $c = v - N + 1 \in \mathbb{N}^*$ et $v + u - N + 1 \in \mathbb{N}^*$, on a, d'après la question **Q11**, pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$:

$$\begin{aligned} [v-N+1]_n &= \frac{(v-N+n)!}{(v-N)!} \\ [v-N+1]_N &= \frac{v!}{(v-N)!} \\ [v+u-N+1]_N &= \frac{(u+v)!}{(u+v-N)!} \end{aligned}$$

De plus, si $N \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $n \leq u$ et :

$$[-u]_n = \prod_{k=0}^{n-1} (-u+k) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (u-k) = (-1)^n \frac{u!}{(u-n)!}.$$

Remarquons que comme $[-u]_0 = 1$, la relation reste vraie quand $n = 0$ et donc valide pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

La relation (*) se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{N!}{n!(N-n)!} \frac{(-1)^n \frac{u!}{(u-n)!}}{\frac{(v-N+n)!}{(v-N)!}} &= \frac{(u+v)!}{v!} \frac{(v-N)!}{(v-N)!} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^N \frac{N! u! (v-N)!}{n!(N-n)! (u-n)! (v-N+n)!} = \frac{(u+v)! (v-N)!}{v! (u+v-N)!} \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^N \frac{u!}{n!(u-n)!} \frac{v!}{(N-n)! (v-(N-n))!} = \frac{(u+v)!}{N! (u+v-N)!} \end{aligned}$$

Soit :

$$\sum_{n=0}^N \binom{u}{n} \binom{v}{N-n} = \binom{u+v}{N}$$

Q22. Soit un groupe de $u+v$ personnes avec $u, v \in \mathbb{N}$ contenant u personnes de type 1 et v personnes de type 2. On choisit simultanément N personnes distinctes dans le groupe avec $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \leq \min(u, v)$.

C'est une combinaison, il y a donc $A = \binom{u+v}{N}$ choix possibles.

Si, parmi les N personnes choisies, on veut exactement n personnes de type 1 (donc exactement $N - n$ personnes de type 2), avec $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, il y a $\binom{u}{n}$ façons de choisir ces n personnes (parmi toutes les u personnes de type 1) et pour chacun de ces choix, il y a $\binom{v}{N-n}$ façons de choisir les $N - n$ personnes de type 2 (parmi toutes les v personnes de ce type). Ainsi, il y a $\binom{u}{n} \binom{v}{N-n}$ façons d'obtenir un groupe de N personnes distinctes contenant exactement n personnes de type 1.

Comme le groupe final de N personnes peut contenir entre 0 (car $N \leq v$) et u (car $N \leq u$) personnes de type 1, le nombre total de groupes de N personnes distinctes est $\sum_{n=0}^N \binom{u}{n} \binom{v}{N-n} = A$.

Ainsi, on retrouve bien l'identité de Vandermonde :

$$\boxed{\sum_{n=0}^N \binom{u}{n} \binom{v}{N-n} = \binom{u+v}{N}}$$

III. C – Fonction hypergéométrique confluyente

Q23. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière sur $] -R, R[$ avec $R > 0$.

On a alors pour tout $x \in] -R, R[$:

$$\begin{cases} f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n \\ x f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n \end{cases}$$

Et :

$$\begin{aligned} x f''(x) + (c-x) f'(x) - a f(x) &= x f''(x) - x f'(x) + c f'(x) - a f(x) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + c \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - a \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} [(c+n)(n+1) a_{n+1} - (a+n) a_n] x^n \end{aligned}$$

La fonction f est solution de l'équation différentielle (III.1) sur $] -R, R[$ si et seulement si pour tout $x \in] -R, R[$:

$$x f''(x) + (c-x) f'(x) - a f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [(c+n)(n+1) a_{n+1} - (a+n) a_n] x^n = 0.$$

Ceci donne par unicité du développement en série entière, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(c+n)(n+1) a_{n+1} - (a+n) a_n = 0 \iff (c+n)(n+1) a_{n+1} = (a+n) a_n.$$

Avec $[a]_{n+1} = (a+n)[a]_n$ et $[c]_{n+1} = (c+n)[c]_n$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$[a]_n [c]_{n+1} (n+1)! a_{n+1} = [a]_n [c]_n n!(n+c)(n+1) a_{n+1} = [a]_n [c]_n n!(a+n) a_n = [c]_n n! [a]_{n+1} a_n.$$

Si $a \in D$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a+k \neq 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[a]_n \neq 0$ et :

$$\frac{[c]_{n+1} (n+1)!}{[a]_{n+1}} a_{n+1} = \frac{[c]_n n!}{[a]_n} a_n.$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{[c]_n n!}{[a]_n} a_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{[c]_n n!}{[a]_n} a_n = \frac{[c]_0 0!}{[a]_0} a_0 = a_0 \iff a_n = a_0 \frac{[a]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!}.$$

Remarquons que si $a \notin D$, alors en posant $p = -a \in \mathbb{N}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c+n \neq 0$ (car $c \in D$) et :

$$a_{n+1} = \frac{a+n}{(c+n)(n+1)} a_n.$$

Ceci implique que $a_{p+1} = 0$ et que tous les a_n sont nuls partir du rang $p+1$. Comme il en va de même pour les $[a]_n = a(a+1)\dots(a+p)\dots(a+n-1)$, la relation obtenue ci-dessus pour $a \in D$ reste vraie pour $a \notin D$.

Finalement, $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une solution de l'équation différentielle (III.1) développable en série entière

sur $] -R, R[$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 \frac{[a]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!}$, donc si et seulement si $f = a_0 M_{a,c}$, soit

$f \in \text{Vect}(M_{a,c})$, en appelant $M_{a,c}$ la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} x^n$.

Remarquons que $M_{a,c}(0) = \frac{[a]_0}{[c]_0} \frac{1}{0!} = 1$, donc $M_{a,c}$ n'est pas nulle et $\dim \text{Vect}(M_{a,c}) = 1$.

Quand $a \notin D$, $M_{a,c}$ est polynômiale et quand $a \in D$, on a $\frac{[a]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et :

$$\left| \frac{\frac{[a]_{n+1}}{[c]_{n+1}} \frac{1}{(n+1)!}}{\frac{[a]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!}} \right| = \left| \frac{n+a}{(n+c)(n+1)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} x^n$ est infini d'après la règle de d'Alembert appliquée aux séries entières. Ainsi, dans tous les cas, $M_{a,c}$ est définie sur \mathbb{R} .

Finalement :

L'ensemble des solutions de (III.1) développable en série entière sur \mathbb{R} est la droite $\text{Vect}(M_{a,c})$ avec $M_{a,c} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a]_n}{[c]_n} \frac{1}{n!} x^n$.

IV - Les polynômes de Laguerre

Q24. On a pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\Phi_n(x) = e^{-x}x^n$ et $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \Phi_n^{(n)}(x)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\Phi_0(x) = e^{-x}$ et :

$$L_0(x) = \frac{e^x}{0!} \Phi_0(x) = 1$$

- $\Phi_1(x) = e^{-x}x$ et :

$$L_1(x) = \frac{e^x}{1!} \Phi_1'(x) = e^x (e^{-x} - e^{-x}x) = 1 - x.$$

- $\Phi_2(x) = e^{-x}x^2$, $\Phi_2'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$ et :

$$L_2(x) = \frac{e^x}{2!} \Phi_2''(x) = \frac{1}{2} e^x (e^{-x}(2 - 2x) - e^{-x}(2x - x^2)) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2.$$

- $\Phi_3(x) = e^{-x}x^3$, $\Phi_3'(x) = e^{-x}(3x^2 - x^3)$, $\Phi_3''(x) = e^{-x}(6x - 6x^2 + x^3)$ et :

$$L_3(x) = \frac{e^x}{3!} \Phi_3^{(3)}(x) = \frac{1}{6} e^x (e^{-x}(6 - 12x + 3x^2) - e^{-x}(6x - 6x^2 + x^3)) = 1 - \frac{5}{2}x + x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

Ainsi :

$L_0 : x \mapsto 1$	$L_1 : x \mapsto 1 - x$
$L_2 : x \mapsto 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$	$L_3 : x \mapsto 1 - \frac{5}{2}x + x^2 - \frac{1}{6}x^3$

Q25. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $f : x \mapsto e^{-x}$ et $g : x \mapsto x^n$. Ces deux fonctions sont de classe C^n sur \mathbb{R} , avec pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f^{(k)} : x \mapsto (-1)^k e^{-x}$ et $g^{(k)} : x \mapsto \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$. On peut donc utiliser la formule de

Leibniz pour écrire $\Phi_n^{(n)} = (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$, soit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} \frac{n!}{k!} x^k = n! e^{-x} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \Phi_n^{(n)}(x) = \frac{e^x}{n!} n! e^{-x} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}.$$

Ainsi :

L_n est polynomiale de degré n avec $L_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} x^k$ et $c_{n,k} = (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k!}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
--

Q26. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \Phi_n^{(n)}(x)$ et $\Phi_n^{(n+1)}(x) = (\Phi_n^{(n)})'(x)$, donc :

$\Phi_n^{(n)}(x) = n! e^{-x} L_n(x)$ et $\Phi_n^{(n+1)}(x) = n! e^{-x} (L_n'(x) - L_n(x))$
--

Q27. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi_{n+1}(x) = e^{-x} x^{n+1} = x(e^{-x} x^n) = x\Phi_n(x)$, donc :

$$\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x\Phi_n(x)).$$

Comme Φ_n et $x \mapsto x$ sont de classe C^∞ sur \mathbb{R} , on peut utiliser la formule de Leibniz :

$$\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x\Phi_n(x)) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{d^k}{dx^k}(x) \Phi_n^{(n+1-k)}(x) = x\Phi_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\Phi_n^{(n)}(x).$$

Avec la question précédente, on obtient :

$$(n+1)!e^{-x}L_{n+1}(x) = xn!e^{-x}(L_n'(x) - L_n(x)) + (n+1)n!e^{-x}L_n(x).$$

Soit :

$$L_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}x(L_n'(x) - L_n(x)) + L_n(x).$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$L_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)L_n(x) + \frac{x}{n+1}L_n'(x)$$

Q28. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi_{n+1}'(x) = (n+1)e^{-x}x^n - e^{-x}x^{n+1} = (n+1)\Phi_n(x) - \Phi_{n+1}(x)$, donc :

$$\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(\Phi_{n+1}'(x)) = (n+1)\Phi_n^{(n+1)}(x) - \Phi_{n+1}^{(n+1)}(x).$$

En multipliant par $\frac{e^x}{(n+1)!}$, on obtient :

$$\frac{e^x}{(n+1)!}\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = \frac{e^x}{n!}\Phi_n^{(n+1)}(x) - \frac{e^x}{(n+1)!}\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) \quad (1)$$

Or :

- $L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\Phi_n^{(n)}(x)$, donc $L_n'(x) = \frac{e^x}{n!}\Phi_n^{(n)}(x) + \frac{e^x}{n!}\Phi_n^{(n+1)}(x)$, soit $\frac{e^x}{n!}\Phi_n^{(n+1)}(x) = L_n'(x) - L_n(x)$;
- $L_{n+1}(x) = \frac{e^x}{(n+1)!}\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x)$, donc $L_{n+1}'(x) = \frac{e^x}{(n+1)!}\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) + \frac{e^x}{(n+1)!}\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x)$.

Ainsi, (1) devient, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$L_{n+1}'(x) = L_n'(x) - L_n(x)$$

Q29. Enfin, en dérivant la relation de la question **Q27**, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} L_{n+1}'(x) &= \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)L_n'(x) - \frac{1}{n+1}L_n(x) + \frac{1}{n+1}L_n'(x) + \frac{x}{n+1}L_n''(x) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1} - \frac{x}{n+1}\right)L_n'(x) + \frac{x}{n+1}L_n''(x) - \frac{1}{n+1}L_n(x) \end{aligned}$$

En remplaçant dans la relation de la question **Q28**, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1} - \frac{x}{n+1}\right) L_n'(x) + \frac{x}{n+1} L_n''(x) - \frac{1}{n+1} L_n(x) = L_n'(x) - L_n(x).$$

Soit :

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0.$$

Ainsi :

$$L_n \text{ est solution de l'équation différentielle (IV.1) : } xy'' + (1-x)y' + ny = 0.$$

Q30. Rappelons que, par définition (donnée dans la question **Q23**), les fonctions hypergéométriques confluentes sont les solutions développables en série entière de l'équation différentielle de la forme $xy'' + (c-x)y' - ay = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $c \in D$.

Or, on vient de voir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est solution d'une équation différentielle de ce type avec $a = -n$ et $c = 1 \in D$. De plus, L_n est polynômiale, donc développable en série entière sur \mathbb{R} .

Ceci permet de conclure que :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, L_n \text{ est une fonction hypergéométrique confluyente.}$$

V - Loi hypergéométrique

V.A – Premiers résultats

Q31. Vérifier que \mathbb{P} définit bien une loi de probabilité, revient à vérifier que :

$$(1) \quad \text{pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) \geq 0 ;$$

$$(2) \quad \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = 1.$$

Comme les coefficients binomiaux sont toujours positifs ou nuls, le premier point est acquis et :

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{pA}{k} \binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}} = \frac{1}{\binom{A}{n}} \sum_{k=0}^n \binom{pA}{k} \binom{qA}{n-k}$$

Or, $pA + qA = A$, donc d'après l'identité de Vandermonde établie dans la question **Q21** (avec $u = pA$, $v = qA$ et $N = n$), on peut écrire $\sum_{k=0}^n \binom{pA}{k} \binom{qA}{n-k} = \binom{pA + qA}{n} = \binom{A}{n}$ et donc $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = 1$. Le second point est vérifié et ainsi :

$$\mathbb{P} \text{ définit bien une loi de probabilité.}$$

Q32. On considère $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$ ou $X \sim \mathcal{H}(n, p, A)$. Comme $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ est fini, X admet bien une espérance. Si $n = 0$, alors $X(\Omega) = \{0\}$ et $E(X) = 0$, sinon, $n \geq 1$ et :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n k \frac{\binom{pA}{k} \binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}} = \frac{1}{\binom{A}{n}} \sum_{k=0}^n k \binom{pA}{k} \binom{qA}{n-k} \\ &= \frac{1}{\binom{A}{n}} \sum_{k=1}^n k \binom{pA}{k} \binom{qA}{n-k} = \frac{1}{\binom{A}{n}} \sum_{k=1}^n pA \binom{pA-1}{k-1} \binom{qA}{n-k} \end{aligned}$$

En réindexant ($k-1$ devient k) et à nouveau avec la formule de Vandermonde (avec cette fois-ci $u = pA-1$, $v = qA$ et $N = n-1$), on obtient :

$$E(X) = \frac{1}{\binom{A}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} pA \binom{pA-1}{k} \binom{qA}{n-1-k} = pA \frac{\binom{pA-1+qA}{n-1}}{\binom{A}{n}} = pA \frac{\binom{A-1}{n-1}}{\binom{A}{n}} = pA \frac{A \binom{A-1}{n-1}}{A \binom{A}{n}} = pA \frac{n \binom{A}{n}}{A \binom{A}{n}}.$$

Soit :

$$E(X) = np$$

Q33. Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Si $k < pA$, on a $k+1 \leq pA$ et $\binom{pA}{k+1} = \frac{(pA)!}{(k+1)!(pA-k-1)!} = \frac{pA-k}{k+1} \frac{(pA)!}{k!(pA-k)!} = \frac{pA-k}{k+1} \binom{pA}{k}$, donc :

$$(k+1) \binom{pA}{k+1} = (pA-k) \binom{pA}{k}.$$

- Si $k = pA$, on a $\binom{pA}{k+1} = pA - k = 0$, donc la relation ci-dessus reste vraie.
- Si $k > pA$, on a $\binom{pA}{k+1} = \binom{pA}{k} = 0$, donc la relation ci-dessus est encore vraie.

Ainsi, la formule $(k+1) \binom{pA}{k+1} = (pA-k) \binom{pA}{k}$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

De la même façon, on obtient aussi pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(k+qA-n+1) \binom{qA}{n-(k+1)} = (n-k) \binom{qA}{n-k}.$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(pA-k)(n-k) \frac{\binom{pA}{k} \binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}} = (k+1)(k+qA-n+1) \frac{\binom{pA}{k+1} \binom{qA}{n-(k+1)}}{\binom{A}{n}}.$$

Soit, avec $P = (X - pA)(X - n)$ et $Q = (X + 1)(X + qA - n + 1)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(k) \mathbb{P}(X = k) = Q(k) \mathbb{P}(X = k + 1).$$

Donc :

La suite $(\mathbb{P}(X = k))_{k \in \mathbb{N}}$ est hypergéométrique.

On a pour tout $t \in [-1, 1]$:

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) t^k.$$

Les nombres n , A et qA sont des entiers naturels tels que $n \leq A$ et $qA \leq A$, donc $qA - n + 1$ est un entier.

Si $qA - n + 1 > 0$, alors $qA - n + 1 \in D$ et la suite $(\mathbb{P}(X = k))_{k \in \mathbb{N}}$ est hypergéométrique, associée aux polynômes $P = (X - pA)(X - n)$ et $Q = (X + 1)(X + qA - n + 1)$. D'après la question **Q14**, on a alors :

$$G_X = G_X(0) F_{-pA, -n, qA - n + 1} = \frac{\binom{qA}{n}}{\binom{A}{n}} F_{-pA, -n, qA - n + 1}.$$

Si $qA - n + 1 \leq 0$, soit $n > qA$, alors $qA - n + 1 \notin D$.

Dans ce cas, on a $\mathbb{P}(X = k) = 0$ quand $k < n - qA$ et pour $k \in \llbracket n - qA, n \rrbracket$, si on pose $k' = k - (n - qA)$, on a pour tout $t \in [-1, 1]$:

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) t^k = \sum_{k=n-qA}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k + n - qA) t^{k+n-qA} = t^{n-qA} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k + n - qA) t^k.$$

Et, si on pose $u_k = \mathbb{P}(X = k + n - qA)$, on a pour tout pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(pA - (k + n - qA))(n - (k + n - qA))u_k = ((k + n - qA) + 1)((k + n - qA) + qA - n + 1)u_{k+1}.$$

Soit :

$$(k + n - A)(k - qA)u_k = (k + n - qA + 1)(k + 1)u_{k+1}.$$

Ici, $n - qA + 1 > 0$, donc $n - qA + 1 \in D$, et à nouveau d'après la question **Q14**, on peut écrire pour tout $t \in [-1, 1]$:

$$G_X(t) = t^{n-qA} \mathbb{P}(X = n - qA) F_{n-A, -qA, n-qA+1}(t) = \frac{\binom{pA}{n-qA}}{\binom{A}{n}} t^{n-qA} F_{n-A, -qA, n-qA+1}(t).$$

Remarquons que $n \leq A = qA + pA$, donc $n - qA \leq pA$.

Finalement :

$$G_X : t \mapsto \begin{cases} \frac{\binom{qA}{n}}{\binom{A}{n}} F_{-pA, -n, qA - n + 1}(t) & \text{quand } n \leq qA \\ \frac{\binom{pA}{n-qA}}{\binom{A}{n}} t^{n-qA} F_{n-A, -qA, n-qA+1}(t) & \text{quand } n > qA \end{cases}$$

V.B – Modélisation

Q34. Chaque tirage dans la seconde urne est une épreuve de Bernoulli. Les n tirages successifs sont effectués avec remise, ils sont indépendants (on a donc un schéma de Bernoulli) et la probabilité d'obtenir une boule blanche à l'issue de chaque tirage est $\frac{pA}{A} = p$. Ainsi, le nombre de boules blanches après les n tirages dans la seconde urne suit une loi binomiale de paramètres n et p , soit :

$$Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

On a alors immédiatement :

$$E(Z) = np \quad \text{et} \quad V(Z) = np(1-p).$$

Q35. Dans la première urne, on tire les n boules simultanément et de manière équiprobable.

Le nombre boules blanches obtenues est compris entre $\max(0, n - qA)$ et $\min(n, pA)$, soit :

$$Y(\Omega) = \llbracket \max(0, n - qA), \min(n, pA) \rrbracket \subset \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Comme les boules sont équiprobables, pour tout $k \in Y(\Omega)$, la probabilité d'obtenir k boules blanches à l'issue des n tirages est :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{\text{Nombre de tirages contenant } k \text{ boules blanches et } n - k \text{ boules noires}}{\text{Nombre de tirages possibles}}.$$

Comme il y a pA boules blanches dans l'urne, il y a $\binom{pA}{k}$ possibilités de choisir k boules blanches et pour chacune de ces possibilités, il y a $\binom{A - pA}{n - k} = \binom{qA}{n - k}$ possibilités que les $n - k$ autres boules soient noires.

Ainsi, le nombre de tirages contenant k boules blanches et $n - k$ boules noires est $\binom{pA}{k} \binom{qA}{n - k}$.

On tire en tout n boules parmi A , il y a donc $\binom{A}{n}$ tirages possibles et finalement, pour tout $k \in Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{\binom{pA}{k} \binom{qA}{n - k}}{\binom{A}{n}}.$$

Ainsi :

$$Y \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$$

V.C – Calcul de la variance

Q36. Pour tout $i \in \llbracket 1, pA \rrbracket$, Y_i vaut 1 si la boule blanche n° i est tirée, et 0 sinon. Comme Y représente le nombre de boules blanches obtenues, les Y_i sont des variables compteur et on a :

$$Y = \sum_{i=1}^{pA} Y_i$$

Chaque boule (blanche ou pas) a une chance sur A d'être choisie. Les Y_i suivent donc toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(Y_i = 1)$ et donc d'espérance $E(Y_i) = \mathbb{P}(Y_i = 1)$ avec :

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{\text{Nombre de tirages contenant la boule blanche n° } i}{\text{Nombre de tirages possibles}}.$$

Or, pour construire un tirage contenant la boule n° i , il faut choisir les $n-1$ autres boules parmi toutes les boules sauf la n° i ($A-1$ boules). Ainsi, le nombre de tirages contenant la boule n° i est $\binom{A-1}{n-1}$. Le nombre total de tirage étant toujours $\binom{A}{n}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{\binom{A-1}{n-1}}{\binom{A}{n}} = \frac{\frac{(A-1)!}{(n-1)!(A-n)!}}{\frac{A!}{n!(A-n)!}} = \frac{n}{A}.$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{pA} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{pA} \frac{n}{A} = pA \frac{n}{A} = np.$$

Ainsi :

On retrouve bien $E(Y) = np$, le résultat trouvé dans la question **Q32**.

On constate alors que :

$$E(Y) = E(Z)$$

Q37. Comme $Y_i(\Omega) = Y_j(\Omega) = \{0,1\}$, on a $(Y_i Y_j)(\Omega) = \{0,1\}$ ($0 \times 0 = 0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$ et $1 \times 1 = 1$) et on a :

$$\mathbb{P}(Y_i Y_j = 1) = \mathbb{P}(Y_i = 1, Y_j = 1) = \frac{\text{Nombre de tirages contenant les boules blanches n° } i \text{ et n° } j}{\text{Nombre de tirages possibles}}.$$

Or, pour construire un tirage contenant les boules n° i et n° j , il faut choisir les $n-2$ autres boules parmi toutes les boules sauf les boules n° i et n° j ($A-2$ boules). Ainsi, le nombre de tirages contenant la boule n° i est $\binom{A-2}{n-2}$ (en supposant $n \geq 2$, sinon la situation est impossible).

Le nombre total de tirage est toujours $\binom{A}{n}$, donc :

$$\mathbb{P}(Y_i Y_j = 1) = \frac{\binom{A-2}{n-2}}{\binom{A}{n}} = \frac{\frac{(A-2)!}{(n-2)!(A-n)!}}{\frac{A!}{n!(A-n)!}} = \frac{n(n-1)}{A(A-1)}.$$

Finalement, pour tous $i, j \in \llbracket 1, pA \rrbracket$ tels que $i < j$:

La variable $Y_i Y_j$, à valeurs dans $\{0,1\}$, suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(Y_i Y_j = 1) = \frac{n(n-1)}{A(A-1)}$.

Q38. Comme pour tout $i \in \llbracket 1, pA \rrbracket$, $Y_i(\Omega) = \{0, 1\}$ et pour tout $x \in \{0, 1\}$, $x^2 = x$, on a $Y_i^2 = Y_i$ et :

$$Y^2 = \left(\sum_{i=1}^{pA} Y_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{pA} Y_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq pA} Y_i Y_j = \sum_{i=1}^{pA} Y_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq pA} Y_i Y_j .$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{i=1}^{pA} E(Y_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq pA} E(Y_i Y_j) = \sum_{i=1}^{pA} \mathbb{P}(Y_i = 1) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq pA} \mathbb{P}(Y_i Y_j = 1) \\ &= \sum_{i=1}^{pA} \frac{n}{A} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq pA} \frac{n(n-1)}{A(A-1)} = pA \frac{n}{A} + 2 \frac{n(n-1)}{A(A-1)} \sum_{i=1}^{pA-1} \sum_{j=i+1}^{pA} 1 \\ &= np + 2 \frac{n(n-1)}{A(A-1)} \sum_{i=1}^{pA-1} (pA - i) = np + 2 \frac{n(n-1)}{A(A-1)} \sum_{i=1}^{pA-1} k \quad (\text{avec } k = pA - i) \\ &= np + 2 \frac{n(n-1)}{A(A-1)} \frac{pA(pA-1)}{2} = np + n(n-1)p \frac{pA-1}{A-1} \end{aligned}$$

Alors :

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = np + n(n-1)p \frac{pA-1}{A-1} - (np)^2 = np \frac{A-1 + (n-1)(pA-1) - np(A-1)}{A-1} .$$

Soit :

$$\boxed{V(Y) = np(1-p) \frac{A-n}{A-1}}$$

On a alors $V(Y) = V(Z) \frac{A-n}{A-1}$, donc :

$$V(Z) - V(Y) = V(Z) \left(1 - \frac{A-n}{A-1} \right) = V(Z) \frac{n-1}{A-1} .$$

Pour $A \geq 2$ et $n \geq 2$, on a $V(Z) - V(Y) > 0$, soit :

$$\boxed{V(Y) < V(Z)}$$

V.D – Résultats asymptotiques

Q39. Soit deux entiers naturels n et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ fixés, et A un entier assez grand tel que $pA \geq n$ et $qA \geq n$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \binom{pA}{k} &= \frac{pA(pA-1)\dots(pA-k+1)}{k!} \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(pA)^k}{k!} \\ \binom{qA}{n-k} &= \frac{qA(qA-1)\dots(qA-n+k+1)}{k!} \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(qA)^{n-k}}{(n-k)!} \\ \binom{A}{n} &= \frac{A(A-1)\dots(A-n+1)}{n!} \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A^n}{n!} \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{pA}{k} \binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}} \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{(pA)^k}{k!} \frac{(qA)^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{A^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{p^k A^k q^{n-k} A^{n-k}}{A^n} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Soit finalement :

$$\boxed{\lim_{A \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

Q40. Avec les notations de la partie **V.B**, on a :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = k) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z = k).$$

Or, on a vu que $E(X) = E(Y) = E(Z)$ et $V(X) = V(Y) = V(Z) \frac{A-n}{A-1}$, donc avec $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A-n}{A-1} = 1$, on a :

$$\boxed{\begin{cases} \lim_{A \rightarrow +\infty} E(X) = E(Z) \\ \lim_{A \rightarrow +\infty} V(X) = V(Z) \end{cases}}$$

Ainsi, la limite obtenue dans la question précédente est cohérente avec l'espérance et variance obtenues plus haut.