Corrigé du DM n° 7

Exercice 1

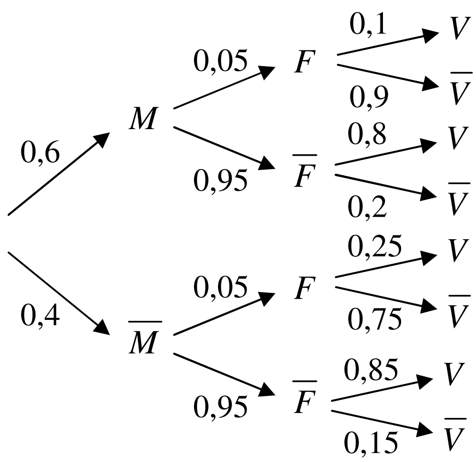
Soit les évènements suivants :

- M = « La commande est contrôlée par Marcel » (donc $\overline{M}$ = . « La commande est contrôlée par Gontran »).
- F = « La commande est frauduleuse ».
- V = « La commande est validée ».
- C = « La commande est correctement traitée ».

L'énoncé nous donne alors :

- $P(M)=0,6$;
- $P(F)=0,05$;
- M et F sont indépendantes ;
- $P_{M\cap F}(\overline{V})=0,9$, donc $P_{M\cap F}(V)=0,1$;
- $P_{M\cap \overline{F}}(\overline{V})=0,2$, donc $P_{M\cap \overline{F}}(V)=0,8$;
- $P_{\overline{M}\cap F}(\overline{V})=0,75$, donc $P_{\overline{M}\cap F}(V)=0,25$;
- $P_{\overline{M}\cap \overline{F}}(\overline{V})=0,15$, donc $P_{\overline{M}\cap \overline{F}}(V)=0,85$.

Ces informations se résument dans l'arbre suivant :



a) On cherche ici $P(C)$ et on a :

$$C=\left(\overline{F}\cap V\right)\cup\left(F\cap\overline{V}\right)=\left(\overline{F}\cap V\cap M\right)\cup\left(\overline{F}\cap V\cap\overline{M}\right)\cup\left(F\cap\overline{V}\cap M\right)\cup\left(F\cap\overline{V}\cap\overline{M}\right).$$

L'union est disjointe, donc :

$$P(C)=P\left(\overline{F}\cap V\cap M\right)+P\left(\overline{F}\cap V\cap\overline{M}\right)+P\left(F\cap\overline{V}\cap M\right)+P\left(F\cap\overline{V}\cap\overline{M}\right).$$

Et :

$$P\left(\overline{F}\cap V\cap M\right)=P\left(M\cap\overline{F}\cap V\right)=P\left(M\cap\overline{F}\right)P_{M\cap\overline{F}}(V)$$
$$=P(M)P(\overline{F})P_{M\cap\overline{F}}(V)=0,6\times0,95\times0,8$$

De même :

$$P\left(\overline{F}\cap V\cap\overline{M}\right)=P(\overline{M})P(\overline{F})P_{\overline{M}\cap\overline{F}}(V)=0,4\times0,95\times0,85$$
$$P\left(F\cap\overline{V}\cap M\right)=P(M)P(F)P_{M\cap F}(\overline{V})=0,6\times0,05\times0,9$$
$$P\left(F\cap\overline{V}\cap\overline{M}\right)=P(\overline{M})P(F)P_{\overline{M}\cap F}(\overline{V})=0,4\times0,05\times0,75$$

Et donc :

$$P(C)=0,6\times0,95\times0,8\ +\ 0,4\times0,95\times0,85\ +\ 0,6\times0,05\times0,9\ +\ 0,4\times0,05\times0,75=0,821$$

Ainsi :

$\boxed{\text{La probabilité qu'une commande soit jugée correctement par le service est } 0,821.}$

b) On sait que la commande est traitée par Marcel et est validée (évènement $M\cap V$). On cherche la probabilité que Marcel ait eu tort, autrement dit que la commande soit frauduleuse.

On cherche donc $P_{M\cap V}(F)$. On a :

$$P_{M\cap V}(F)=\frac{P\left(M\cap V\cap F\right)}{P\left(M\cap V\right)}=\frac{P\left(M\cap F\cap V\right)}{P\left(M\cap F\cap V\right)+P\left(M\cap\overline{F}\cap V\right)}$$
$$=\frac{P(M)P(F)P_{M\cap F}(V)}{P(M)P(F)P_{M\cap F}(V)+P(M)P(\overline{F})P_{M\cap\overline{F}}(V)}=\frac{P(F)P_{M\cap F}(V)}{P(F)P_{M\cap F}(V)+P(\overline{F})P_{M\cap\overline{F}}(V)}$$
$$=\frac{0,05\times0,1}{0,05\times0,1+0,95\times0,8}=\frac{1}{153}$$

Ainsi :

$\boxed{\text{La probabilité que Marcel ait eu tort quand il valide une commande est } \frac{1}{153}.}$

Exercice 2

A chaque tirage, les cartes sont équiprobables. On peut donc utiliser la formule :

$$\textit{probabilité}=\frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}.$$

On pioche au hasard 3 cartes parmi 21, donc il y a $\binom{21}{3}=\frac{21\times20\times19}{3\times2}=7\times10\times19$ cas possibles.

Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de multiples de 5 obtenus.

a) On cherche $P\left(X=0\right)$ (n'obtenir aucun multiple de 5), $P\left(X\geq1\right)$ (obtenir au moins un multiple de 5) et $P\left(X=1\right)$ (obtenir exactement un multiple de 5).

- Parmi les 21 atouts, il y a 4 atouts multiples de 5 (le 5, le 10, le 15 et le 20), donc $21-4=17$ atouts non multiples de 5, et ainsi le nombre de cas favorables pour n'obtenir aucun multiple de 5 est $\binom{17}{3}=\frac{17\times16\times15}{3\times2}=17\times8\times5$. Ainsi, la probabilité de n'obtenir aucun multiple de 5 est $P(X=0)=\frac{17\times8\times5}{7\times10\times19}=\frac{17\times4}{7\times19}=\frac{68}{133}$.
- Obtenir au moins un multiple de 5 est le contraire de n'en obtenir aucun, la probabilité d'obtenir au moins un multiple de 5 est donc $P(X\geq1)=1-P(X=0)=1-\frac{68}{133}=\frac{65}{133}$.
- Pour obtenir exactement un multiple de 5, il faut choisir ce multiple : 4 possibilités et, pour chacune de ces possibilités, il faut choisir 2 atouts parmi les 17 atouts non multiples de 5 possibles : il y a donc $4\times\binom{17}{2}=4\times\frac{17\times16}{2}=4\times17\times8$ possibilités pour obtenir exactement un multiple de 5, et la probabilité de cet évènement est alors $P(X=1)=\frac{4\times17\times8}{7\times10\times19}=\frac{272}{665}$.

Finalement :

- La probabilité de n'obtenir aucune carte multiple de 5 est $\frac{68}{133}$.
- La probabilité d'obtenir au moins une carte est multiple de 5 est $\frac{65}{133}$.
- La probabilité d'obtenir exactement une carte est multiple de 5 est $\frac{272}{665}$.

b) On cherche ici $P_{(X\geq1)}(X\geq2)$, soit :

$$P_{(X\geq1)}(X\geq2)=\frac{P((X\geq1)\cap(X\geq2))}{P(X\geq1)}=\frac{P(X\geq2)}{P(X\geq1)}=\frac{1-P(X=0)-P(X=1)}{P(X\geq1)}.$$

Soit :

$$P_{(X\geq1)}(X\geq2)=\frac{1-\frac{68}{133}-\frac{272}{665}}{\frac{65}{133}}=\frac{53}{325}.$$

Ainsi :

La probabilité d'avoir au moins un autre multiple de 5 quand on en a déjà un est $\frac{53}{325}$.

c) Appelons N l'évènement : « La nouvelle carte choisie est un multiple de 5 ».

On cherche $P_{(X\leq2)}(N)$ et :

$$P_{(X\leq2)}(N)=\frac{P((X\leq2)\cap N)}{P(X\leq2)}=\frac{P((X=0)\cap N)+P((X=1)\cap N)+P((X=2)\cap N)}{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)}.$$

On a :

$$P(X=2)=\frac{\binom{4}{2}\times 17}{\binom{21}{3}}=\frac{6\times 17}{7\times 10\times 19}=\frac{3\times 17}{7\times 5\times 19}$$

Et, pour $k\in\{0,1,2\}$, $P\big((X=k)\cap N\big)=P(X=k)P_{(X=k)}(N)$ avec $P_{(X=k)}(N)=\dfrac{4-k}{21-3}$, donc :

$$P_{(X\le 2)}(N)=\frac{P(X=0)\frac{4}{18}+P(X=1)\frac{3}{18}+P(X=2)\frac{2}{18}}{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)}$$
$$=\frac{\frac{17\times 4\times 5}{7\times 5\times 19}\frac{4}{18}+\frac{2\times 17\times 8}{7\times 5\times 19}\frac{3}{18}+\frac{3\times 17}{7\times 5\times 19}\frac{2}{18}}{\frac{17\times 4\times 5}{7\times 5\times 19}+\frac{2\times 17\times 8}{7\times 5\times 19}+\frac{3\times 17}{7\times 5\times 19}}=\frac{67}{9\times 39}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité que la nouvelle carte soit un multiple de 5 est } \frac{67}{351}.}$$

Exercice 3

a) Les variables X et Y suivent la même loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, donc :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}P(X=k)k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

Avec le théorème du transfert :

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{n}P(X=k)k^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}k^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Et avec la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{n+1}{2}\left(\frac{2n+1}{3}-\frac{n+1}{2}\right)=\frac{n^2-1}{12}.$$

Comme X et Y suivent la même loi :

$$\boxed{E(X)=E(Y)=\frac{n+1}{2}\quad\text{et}\quad V(X)=V(Y)=\frac{n^2-1}{12}}$$

b) On a $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$, donc $S(\Omega)=[\![1,n]\!]$ et pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$P(S=i,X=j)=\begin{cases}0 & \text{quand } i<j\\ P(X=i,Y\le i) & \text{quand } i=j\\ P(X=j,Y=i) & \text{quand } i>j\end{cases}$$

Comme X et Y sont indépendantes :

$$P(S=i,X=j)=\begin{cases}0 & \text{quand } i<j\\ P(X=i)P(Y\le i) & \text{quand } i=j\\ P(X=j)P(Y=i) & \text{quand } i>j\end{cases}$$

Avec $P(X=j)=P(Y=i)=\dfrac{1}{n}$ et $P(Y\le i)=\sum_{k=1}^{i}P(Y=i)=\sum_{k=1}^{i}\dfrac{1}{n}=\dfrac{i}{n}$, on obtient, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$:

$$\boxed{P(S=i,X=j)=\begin{cases}0 & \text{quand } i<j\\ \dfrac{i}{n^2} & \text{quand } i=j\\ \dfrac{1}{n^2} & \text{quand } i>j\end{cases}}$$

Remarquons que l'on a bien :

$$\sum_{1\le i,j\le n}P(S=i,X=j)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}P(S=i,X=j)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n^2}+\frac{n-j}{n^2}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}=1.$$

Et, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{n}P(S=i,X=j)=\sum_{i=j}^{n}P(S=i,X=j)=\frac{j}{n^2}+\frac{n-j}{n^2}=\frac{1}{n}=P(X=j).$$

c) On a vu que $S(\Omega)=[\![1,n]\!]$ et pour tout $i\in[\![1,n]\!]$:

$$P(S=i)=\sum_{j=1}^{n}P(S=i,X=j)=\sum_{j=1}^{i}P(S=i,X=j)=\frac{i-1}{n^2}+\frac{i}{n^2}.$$

Soit, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$:

$$\boxed{P(S=i)=\frac{2i-1}{n^2}}$$

On a :

$$E(S)=\sum_{i=1}^{n}iP(S=i)=\sum_{i=1}^{n}i\frac{2i-1}{n^2}=\frac{1}{n^2}\left(2\sum_{i=1}^{n}i^2-\sum_{i=1}^{n}i\right)$$
$$=\frac{1}{n^2}\left(2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$$

Avec le théorème du transfert :

$$E(S^2)=\sum_{i=1}^{n}i^2P(S=i)=\sum_{i=1}^{n}i^2\,\frac{2i-1}{n^2}=\frac{1}{n^2}\left(2\sum_{i=1}^{n}i^3-\sum_{i=1}^{n}i^2\right)$$
$$=\frac{1}{n^2}\left(2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=\frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n}$$

Et avec la formule de Koenig-Huygens :

$$V(S)=E(S^2)-E(S)^2=\frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n}-\left(\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}\right)^2=\frac{(n^2-1)(2n^2+1)}{36n^2}.$$

Finalement :

$$\boxed{E(S)=\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}\quad\text{et}\quad V(S)=\frac{(n^2-1)(2n^2+1)}{36n^2}}$$

d) On a $S=\max(X,Y)=\dfrac{X+Y+|X-Y|}{2}$ et $T=\min(X,Y)=\dfrac{X+Y-|X-Y|}{2}$, donc :

$$S+T=X+Y$$

$$ST=\frac{X+Y+|X-Y|}{2}\frac{X+Y-|X-Y|}{2}=\frac{(X+Y)^2-(X-Y)^2}{4}=XY$$

Ainsi, par linéarité de l'espérance :

$$E(T)=E(X+Y-S)=E(X)+E(Y)-E(S)=2\frac{n+1}{2}-\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

Et par indépendance de X et Y :

$$E(ST)=E(XY)=E(X)E(Y)=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Ainsi :

$$\boxed{E(T)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\quad\text{et}\quad E(ST)=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

e) On a :

$$E(S)E(T)=\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\frac{8n^2+2n-1}{9n^2}=E(ST)\left(1-\frac{(n-1)^2}{9n^2}\right).$$

Or $n\geq 2$, donc $\dfrac{(n-1)^2}{9n^2}>0$ et ainsi, $E(S)E(T)\neq E(ST)$, ce qui permet de conclure que :

$\boxed{\text{Les variables } S \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

Exercice 4

a) Par définition de la variable X_i, on a $X_i(\Omega)=\{0,1\}$ et $(X_i=1)$ est l'évènement : « les deux chaussures de la paire n° i se trouvent parmi les chaussures tirées ».

On choisit, de manière équiprobable, $2r$ chaussures parmi les $2n$ du placard : il y a $\dbinom{2n}{2r}$ cas possibles. Pour obtenir la paire n° i complète il faut avoir les 2 chaussures de cette paire (1 seule possibilité) et choisir au hasard $2r-2$ chaussures parmi les $2n-2$ restantes : $\binom{2n-2}{2r-2}$ possibilités. On a donc :

$$P\left(X_i=1\right)=\frac{\binom{2n-2}{2r-2}}{\binom{2n}{2r}}=\frac{(2n-2)!(2n-2r)!(2r)!}{(2n)!(2n-2r)!(2r-2)!}=\frac{r(2r-1)}{n(2n-1)}.$$

Ainsi :

$$\boxed{X_i \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } P\left(X_i=1\right)=\frac{r(2r-1)}{n(2n-1)}.}$$

On a $E(X_i)=P\left(X_i=1\right)$, donc :

$$\boxed{E(X_i)=\frac{r(2r-1)}{n(2n-1)}}$$

b) Les X_i sont des variables compteur et il y a n paires de chaussures, donc :

$$\boxed{X=\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Par linéarité de l'espérance, on a alors :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{r(2r-1)}{n(2n-1)}=n\frac{r(2r-1)}{n(2n-1)}.$$

Soit :

$$\boxed{E(X)=\frac{r(2r-1)}{2n-1}}$$

c) <u>Loi se *S*…</u>

On a $X(\Omega)=[\![1,r]\!]$. On est en situation d'équiprobabilité et on a vu que le nombre de tirages possibles est $\binom{2n}{2r}$.

Soit $k\in[\![1,r]\!]$.

Pour obtenir exactement k paires de chaussures complètes, il faut choisir ces k paires parmi les n paires possibles : il y a $\binom{r}{k}$ possibilités. Pour chacune de ces possibilités, il faut alors choisir $2r-2k$ autres chaussures dépareillées par parmi les $2n-2k$ chaussures restantes, autrement dit, il faut choisir $2r-2k$ paires parmi les $n-k$ paires restantes, et puis choisir une des deux chaussures de chaque paire choisie, soit $2\binom{n-k}{2r-2k}$.

Ainsi, il y a $2\binom{n-k}{2r-2k}\binom{r}{k}$ possibilités de réaliser l'évènement $(X=k)$.

Donc, pour tout $k \in [\![1,r]\!]$:

$$\boxed{P(X=k)=\begin{cases}0 & \text{si } k<2r-n\\ \dfrac{2\binom{n-k}{2r-2k}\binom{r}{k}}{\binom{2n}{2r}} & \text{si } k\geq 2r-n\end{cases}}$$