Exercices de révision de Sup

Bases

1. Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Démontrer les égalités suivantes :

$$(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C) \quad \text{et} \quad (A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C).$$

2. Soit E un ensemble et $f:E\to E$ telle que $f\circ f\circ f=f$. Prouver que :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective.}$$

3. On considère quatre ensembles E, F, G et H et trois applications $f:E\to F$, $g:F\to G$ et $h:G\to H$.
   a) Montrer que si $g\circ f$ est injective alors f injective.
   b) Montrer que si $g\circ f$ est surjective alors g surjective.
   c) Montrer que $g\circ f$ et $h\circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g et h sont bijectives.

4. Soient E, F et G trois ensembles et quatre applications $f_1:E\to F$, $f_2:E\to F$, $g_1:F\to G$ et $g_2:F\to G$.
   a) Montrer que si g est injective et $g_1\circ f_1=g_1\circ f_2$, alors $f_1=f_2$.
   b) Montrer que si f est surjective et $g_1\circ f_1=g_2\circ f_1$, alors $g_1=g_2$.

5. Pour un entier naturel $n\geq 2$ donné, calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$.

6. Pour un entier naturel n non nul donné, calculer les sommes suivantes :

$$S_1=\sum_{1\leq i\leq j\leq n} i^2 j \qquad S_2=\sum_{1\leq i\leq j\leq n} j^2 i \qquad S_3=\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\binom{j}{i}2^i \qquad S_4=\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\binom{j}{i}2^j.$$

Entiers naturels

7. Soit E un ensemble fini de cardinal au moins 6. Prouver par récurrence que le nombre d'applications de E dans lui-même est plus grand que le cardinal du produit cartésien de l'ensemble des parties de E par l'ensemble des bijections de E dans lui-même. On admettra que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\geq 2$.

8. Soit E un ensemble de cardinal 3. Calculer le nombre de parties du produit cartésien de l'ensemble des bijections de E dans lui-même par l'ensemble des injections de E dans l'ensemble des bijections de E dans lui-même.

9. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^2$ les équations suivant :
   a) $(x-1)\mid(x+3)$.
   b) $x^2-y^2-4x-2y=5$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de 2n-uplets d'éléments de $[\![1,n]\!]$ où chaque élément de $[\![1,n]\!]$ apparait exactement deux fois (par exemple, 1221 ou 14322134).

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les couples (A,B) de $\mathscr{P}([\![1,n]\!]) \times \mathscr{P}([\![1,n]\!])$ tels que $A \subset B$.
Même chose avec $A \cap B = \varnothing$.

Nombres réels

12. Soient $A = \left\{ \dfrac{p}{qp+1}, (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$ et $B = \left\{ \dfrac{p}{qp+1}, (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \right\}$.
Montrer que A possède une borne inférieure et une borne supérieure. Les déterminer. Ces bornes sont-elles atteintes ? En est-il de même pour B ?

13. On pose $E = \left\{ x \in \mathbb{R}^*, -2 < x + \dfrac{1}{2x} \le 2 \right\}$ et $E' = \left\{ x \in \mathbb{R}, \mathrm{E}(x) \ne 0, -2 < \mathrm{E}(x) + \dfrac{1}{2\mathrm{E}(x)} \le 2 \right\}$.
   a) Montrer que *E* est la réunion de deux intervalles.
   b) Déterminer, si elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure. Sont-elles atteintes dans *E* ?
   c) En est-il de même pour E' ?

14. Déterminer les ensembles $E = \{ x \in \mathbb{R}, \mathrm{E}(x) = \mathrm{E}(x^2) \}$ et $E' = \left\{ x \in \mathbb{R}, \mathrm{E}(x) = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x} \right) \right\}$.

15. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \dfrac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ et en déduire $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \right)$.

16. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}\left(\dfrac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{2} \right) = \mathrm{E}(\sqrt{n})$. A-t-on toujours $\dfrac{\mathrm{E}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{2} = \mathrm{E}(\sqrt{n})$?

Nombres complexes

17. Soit un réel $\theta \ne \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ donné. Déterminer les réels λ pour lesquels $\dfrac{1 + i\lambda \tan\theta}{\lambda + i\tan\theta}$ est imaginaire pur.

18. Soient $n \in \mathbb{N}$ et x un réel. Donner une forme simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \ne 1$ on a $\left| \dfrac{1-z^n}{1-z} \right| \le \dfrac{1-|z|^n}{1-|z|}$.

20. Soient a, b et c trois complexes de module 1, montrer que $|ab + bc + ca| = |a + b + c|$.

21. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + 9|z| - 10 = 0$.

22. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2 + 3z - 2)^2 + (2z^2 - 3z + 2)^2 = 0$.

23. Résoudre $\sin 7x - \cos 5x + \sin 3x - \cos x = 0$.

24. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\begin{cases} e^z + e^{z'} = 2 \\ e^z e^{z'} = 2 \end{cases}$ d'inconnues z et z'.

25. Soient a et b deux réels positifs tels que $a + b = 1$ et u et v deux complexes de module 1. Prouver que :

$$|au + bv| \geq \frac{1}{2}|u + v|.$$

☺ *On pourra poser (en justifiant que c'est possible) :* $\frac{u}{v} = e^{i2\theta}$.

26. En admettant que la composée de deux réflexions planes est soit une rotation, soit une translation, démontrer que l'écriture complexe d'une réflexion du plan est de la forme $z' = a\overline{z} + b$ où a et b sont deux nombres complexes fixés tels que $|a| = 1$.

27. Dans le plan complexe, on cherche à déterminer l'écriture complexe de la réflexion par rapport à la seconde bissectrice Δ, d'équation $y = -x$. On appelle s cette réflexion et σ la réflexion d'axe (Oy).
    a) Démontrer que $s \circ \sigma$ est le quart de tour direct de centre O, l'origine du repère, que l'on notera r.
    b) Justifier que $s = r \circ \sigma$ et en déduire l'écriture complexe de s.

28. Dans le plan complexe, soient r le quart de tour indirect de centre A, d'affixe i, et t la translation de vecteur $\vec{u}$, d'affixe – i.
    a) Déterminer les écritures complexes de r, t et $t \circ r$.
    b) Donner la nature de $t \circ r$, ainsi que ses éléments caractéristiques.

29. Un jeune homme aventureux a découvert un ancien parchemin sur lequel est écrit :

    « *Naviguez vers l'île de la Tortue. A l'extrême nord de l'île, vous trouverez un vaste pré où se dressent un unique et antique chêne et un non moins unique pin. Vous verrez aussi un ancien gibet où l'on pendait les traîtres. En partant de ce gibet, dirigez-vous tout droit vers le chêne en comptant vos pas. Arrivé au chêne, tournez à droite en angle droit, faites le même nombre de pas et marquez l'endroit ou vous aboutissez. Maintenant, retournez au gibet et repartez tout droit en direction du pin en comptant à nouveau vos pas. Là, tournez à gauche en angle droit et refaites le même nombre de pas qu'entre le gibet et le pin. Marquez le second endroit. Creusez exactement au milieu des deux endroits marqués et vous trouverez mon trésor* ».

    Le jeune homme se rend dans le pré indiqué, repère le chêne et le pin, mais pour son malheur, le gibet a disparu et il repart sans le moindre doublon d'or. S'il avait réfléchi un peu, il aurait pu trouver le trésor ! Et vous ?

    ☺ *Prendre un repère du plan complexe bien choisi et des rotations tout aussi bien choisies…*

Fonctions numériques

30. Résoudre les équations :

 a) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

 b) $2\arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

31. Résoudre $2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1) = \dfrac{\pi}{2}$.

32. Déterminer tous les couples de réels (a,b) tels que $\arctan a + \arctan b = \dfrac{\pi}{4}$.

33. Etudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x - \arctan x}$.

34. Etudier la fonction f définie par $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

35. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(x+k)$.

 Simplifier $f_n(x)$ puis dresser le tableau de variations de f_n.

36. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k} e^{kx}$.

 Montrer, suivant la parité de n, que $f_n(x) = 0$ admet 0 ou 1 solution.

37. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

38. Soit $f \in C([0;1], \mathbb{R}_+)$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

 Montrer que : $\forall \lambda \in \,]0;1[,\ \exists x \in [0;1],\ f(x+\lambda) = f(x)$.

39. Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(ax+1) = f(x+1)$ où a est un réel fixé tel que $|a| < 1$.

 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(a^n x + 1) = f(x+1)$, puis que f est constante.

40. Soit $f(x) = \cos^2 x \dfrac{\ln(1-\sin x)}{x}$.

 a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

 b) Montrer que f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$ en une fonction que l'on appellera $\tilde{f}$.

 c) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = x\ln x$ pour $x > 0$ et $g(0) = 0$ est bornée sur $[0;2]$.

 d) En déduire que $\tilde{f}$ admet des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$.

 e) Montrer que $\tilde{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. f l'est-elle ?

41. Soit g une fonction continue sur $[a\,;+\infty[$ et dérivable sur $]a\,;+\infty[$ telle que $g(a) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

 Montrer qu'il existe $c > a$ tel que $g'(c) = 0$.

42. Soit f la fonction définie par $f(x)=e^{-x^2}$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puis prouver par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

- $f^{(n)}=P_n f$ où P_n est une fonction polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$.
- P_n est paire quand n est pair et impaire quand n est impair.
- P_n possède n racines réelles distinctes symétriques par rapport à 0.

43. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que la dérivée de f est croissante. Montrer que si la courbe de f possède deux tangentes parallèles alors f est affine sur un intervalle et que les deux tangentes sont confondues.

44. Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2e^{2x}$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puis déterminer ses dérivées successives.

45. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan. Montrer que si f admet deux points fixes alors $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à la première bissectrice d'équation $y=x$. La réciproque est-elle vraie ?

46. Pour $a>0$, on note (E_a) l'équation $a\ln(x+a)=x$.

a) Déterminer le nombre de solutions de (E_a) suivant la valeur de a.

Dans la suite, on prend $a\geq 1$ et on appelle x_a la solution positive de (E_a).

b) Montrer que $\dfrac{x_a}{a}-\ln\left(1+\dfrac{x_a}{a}\right)=\ln a$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x)=x-\ln(1+x)$.

c) Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

d) Dresser le tableau de variations complet de g^{-1} sur $\mathbb{R}_+$.

e) Prouver que g^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

f) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=1$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g^{-1}(x)}{x}=1$.

g) La courbe de g admet-elle une asymptote en $+\infty$? Qu'en est-il de celle de g^{-1} ?

h) On pose $h(a)=x_a$.

Montrer que $h(a)=a\,g^{-1}(\ln a)$, puis dresser le tableau de variations de h sur $[1;+\infty[$.

Suites numériques

47. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2\sqrt{k}} > \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.

b) Etudier la suite u.

48. Pour tout entier naturel n, on définit la fonction $f_n(x) = x^5 + x - n$.

a) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0$ admet une unique solution réelle positive, notée u_n.

b) Démontrer que la suite u est strictement croissante (*on pourra évaluer* $f_{n+1}(u_n)$).

c) La suite u converge-t-elle ? Déterminer sa limite.

49. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $1 < u_n \le 2$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_0 u_1 \dots u_n$. Montrer que v est arithmétique.

c) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

d) Etudier u.

50. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{1 + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

On donne $f\big(f(1)\big) \approx 1{,}35$.

51. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

52. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+2} - 3u_{n+1} - 2u_n = 0$.

Déterminer u_n en fonction de n sachant que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $u_{10} = 1$.

53. Montrer qu'une suite réelle non majorée possède une suite extraite tendant vers + ∞.

54. Soit (u, v) un couple de suites complexes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n \end{cases}$$

Déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

55. Soit u une suite réelle majorée et $\ell = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \max(u_0, u_1, ..., u_n)$.

   a. Justifier que ℓ existe bien.

   b. Montrer que si $\ell = \max\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, alors la suite v est stationnaire.

   c. Montrer que la suite v est convergente et que sa limite est ℓ.

56. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$. On pose :

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2$ en fonction de n et donner un équivalent simple de v_n.

57. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{1}{4}\frac{u_n u_{n+1}}{u_n - u_{n+1}}$.

   On admet que u est bien définie. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$, puis exprimer u_n en fonction de n.

Analyse asymptotique

58. Donner l'équivalent le plus simple de $u_n = n(\sqrt[n]{n} - 1)$ et de $v_n = \dfrac{n\,\mathrm{sh}^2\, n}{(n+3)^2}$.

59. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{a} g = \ell \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Montrer que $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$.

60. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $e^f \underset{a}{\sim} e^g \Leftrightarrow \lim\limits_{a}(f - g) = 0$.

61. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathrm{sh}\left(\frac{x}{n}\right)$. Prouver que $\forall\, n \geq 2$, f_n possède exactement deux points fixes non nuls, que l'on notera x_n et y_n, puis montrer que les suites $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\geq 2}$ et $\left(\frac{1}{y_n}\right)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. Prouver que $|x_n| \sim |y_n| \sim 2n\ln n$.

62. Comparer les trois suites $u_n = n^{(\ln n)^2}$, $v_n = (n^2)^{\ln n}$ et $w_n = (\ln n)^{n\ln n}$.

63. Comparer les trois suites $u_n = n^{(\ln n)^3}$, $v_n = (n^3)^{\ln n}$ et $w_n = n^{n\ln n}$.

64. Donner un équivalent simple de $u_n = n(\sqrt[n]{n} - 1)$ et $v_n = \dfrac{\ln\left[\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right]}{\ln\left[\cos\left(\frac{b}{n}\right)\right]}$ où a et b sont deux réels non nuls.

65. Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, dérivable en a et telle que $f(a) = 0$.

   Déterminer $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\mathrm{sh}^2\left(f(x)\right)}{\sin\left(f(x)\sin(x-a)\right)}$.

66. Déterminer le développement asymptotique à n termes en 0 des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\sqrt{\ln(1+2x)}$ $(n=3)$.

b) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}$ $(n=2)$.

67. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 et au point a des fonctions suivantes :

a) $f(x)=(1+x)^x$ avec $a=0$.

b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ avec $a=1$.

68. Prouver que pour tout $x\in[0;1[$, $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\leq\left|\ln(1-x)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^k}{k}\right|\leq\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{n+1}$.

En déduire, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k k}\right)$.

69. Soit f une fonction définie au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$ telle que $\lim\limits_a f=1$. Montrer que $\ln f(x)\underset{a}{\sim}f(x)-1$.

70. Soit $p\in\mathbb{N}$. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\sum\limits_{k=n}^{n+p}k^k$. En donner un équivalent simple.

71. Déterminer le développement limité à l'ordre n et au point a des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{x}\right)$ avec $a=1$ et $n=4$.

b) $f(x)=\dfrac{1}{1+\cos x}$ avec $a=0$ et $n=5$.

72. Donner un équivalent simple de $u_n=\sqrt{\ln(n+1)-\ln n}$ et $v_n=\tan^2\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$.

73. Déterminer un développement asymptotique en $+\infty$ dont la partie principale contient deux termes de la fonction $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x+1}}-x^{\frac{1}{x}}$.

74. Déterminer des réels a et b pour que le premier terme du DL en 0 de $f(x)=\cos x-\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit de degré le plus grand possible. Donner ce premier terme.

75. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x)=e^x+x^2-nx$.

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n admet un minimum, que l'on notera u_n, atteint en un point et un seul, que l'on notera x_n, puis déterminer des équivalents les plus simples possibles de u_n et x_n.

76. Donner un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $f(x)=\sin(\tan x)-\tan(\sin x)$.

77. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n(x) = x^3 - (n+2)x^2 + (2n+1)x - 1$.

a) Montrer que pour n assez grand, P_n admet trois racines réelles a_n, b_n et c_n telles que :

a. $0 < a_n < \frac{1}{n} < 1 < b_n < 3 < \frac{2n+1}{3} < c_n$.

b) Montrer que $a_n \sim \frac{1}{2n}$, $b_n \sim 2$ et $c_n \sim n$.

Séries numériques

78. Soit $\alpha > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) - \alpha \ln n$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) Etudier la convergence de Σu_n quand α est entier.

79. On pose $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)^{-1}$.

a) A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégrale appliqué à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ entre 0 et 1, prouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

b) Montrer que Σu_n converge et calculer sa somme.

80. Convergence et somme de la série de terme général $u_n = 2^n \tan^2 \frac{x}{2^{n+1}} \tan \frac{x}{2^n}$ avec $x \in \left]0\,; \frac{\pi}{2}\right[$.

81. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

Montrer que la série $\sum u_n$ converge et montrer que $|R_n| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

82. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

83. Convergence et somme de la série de terme général u_n avec pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}$.

b) $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k} k!}$.

Intégration

84. Montrer que la fonction $f : x \mapsto E(\arccos x) + E(\arcsin x) + E(\arctan x)$ est en escalier sur $[-1;1]$ et donner une subdivision adaptée à f sur cet intervalle.

85. Calculer les intégrales suivantes.

   a) $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + |x(2-x)|}\,dx$.

   b) $J = \int_{0}^{\ln 2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t + 3\operatorname{ch} t + 2} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} t - 1}{\operatorname{ch} t + 1}}\,dt$.

86. Etudier la fonction f définie par $f(x) = \int_{1}^{x^2} \frac{\ln t^2 - \ln x^2}{t^2 + x^2}\,dt$.

87. Etudier la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ avec $I_n = \int_0^1 e^{nt}\cos(e^t)\,dt$.

88. Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^2 + k^2}$. Déterminer la limite et un équivalent simple de u_n et v_n.

89. Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[0;1]$ telle que $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{f(t)}$.

   Montrer qu'il existe un réel a compris entre 0 et 1 tel que $f(a) = 1$.

90. Pour tout entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_1^e (\ln x)^n\,dx$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$ et étudier les variations de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Qu'en déduire pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   b) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

   c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

   d) Déterminer un équivalent de I_n.

91. On pose $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}_+^*)$ et pour toute $f \in E$, $I(f) = \left(\int_0^1 f(t)\,dt\right) \times \left(\int_0^1 \frac{dt}{f(t)}\right)$. Montrer que $\inf_{f\in E} I(f) = 1$.

92. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$, à valeurs dans $[a,b]$ avec $a < 0 < b$ et telle que $\int_{[0;1]} f = 0$.

   Montrer que $\int_{[0;1]} f^2 \leq -ab$.

   ☺ *On pourra commencer par le cas où* $a = -b$, *puis, dans le cas général, introduire une fonction* $g = f - \lambda$ *où* λ *est un réel bien choisi.*

93. Soit $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(1)=0$. Montrer que $\int_0^1 f^2 \leq 4\int_0^1 t^2 f'(t)^2 dt$.

94. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ et en déduire l'équivalent le plus simple de :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right).$$

95. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt$.

96. Déterminer la limite et un équivalent simple de $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$. ☺ *Il y a un 1 de trop…*

97. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Déterminer la limite et un équivalent simple de u_n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt$.

98. Calculer les intégrales suivantes.

a) $I = \int_0^1 x(\arctan x)^2 dx$. b) $J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^2(2t)}{\sin t} dt$.

99. Calculer $I = \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+x+1} dx$ et $J = \int_{-1}^{1} e^x \ln\left(\operatorname{ch} x\right) dx$.

100. Calculer les intégrales $I = \int_0^{1/2} \frac{t^2+t-1}{t^2+t-2} dt$ et $J = \int_0^1 t^2 \arctan t \, dt$.

101. Construire le tableau de variations complet de la fonction g définie par $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$.

☺ *Pour les limites, on pourra encadrer* e^t.

102. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln x & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

a. Justifier que I_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, puis calculer I_n en fonction de n.

c. Calculer I_1.

103. Etudier la fonction f définie par $f(x) = \int_{-x}^{x} \ln(1+e^{-t}) dt$.

Equations différentielles

104. Résoudre $(E): x(x^2+1)y' - y = x^3$. On cherchera les solutions maximales.

105. Résoudre l'équation différentielle $|1+t|\,y' + y = 1+2t$.

106. Résoudre le système différentiel $(S): \begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3y(t) + e^t \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t) \end{cases}$ avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 4$.

☺ *Poser* $z = x - y$.

107. Résoudre $(E_\lambda): y'' - \lambda y = e^{\lambda t}$ où λ est un paramètre réel.

108. On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E): (1+t^2)y'' - 2(t-1)^2 y' - 2(2t-1)y = 2t$.

a) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $g(t) = (1+t^2)f'(t) + 2tf(t)$.
Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 simple. ☺ *Après avoir justifié que cela est possible, calculer* $g'(t) - 2g(t)$.

b) Résoudre alors (E).

109. Soit l'équation $(E): y'' - y = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$. On cherche à résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

a) Pour toute fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on définit la fonction $g: t \mapsto e^t f(t)$.
Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si g' est solution de $(E'): y' - 2y = \dfrac{e^t}{\operatorname{ch} t}$.

b) Résoudre (E') puis (E).

Algèbre linéaire

110. Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto (x+y, x+z)$. Montrer que u est linéaire, puis déterminer son image est son noyau.

111. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[x]$, $F = \{f \in E \setminus f(1) = f(-1) = 0\}$ et $G = \left\{ f \in E \setminus f(0) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^n} = 0 \right\}$.

Montrer que F et G sont deux sous-espaces isomorphes de E.

112. Soit E le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des fonctions définies au voisinage de 0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) On pose $F = \{f \in E, f(x) = \underset{0}{o}(x)\}$. F est-il un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel ?

b) Même question pour $G = \{f \in E, f(x) \underset{0}{\sim} x\}$.

113. Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la courbe admet une asymptote en $+\infty$.

On pose $F = \mathbb{R}_1[x]$ et $G = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \lim\limits_{+\infty} f = 0\}$.

Prouver que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

114. Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $f \circ g = id_E$.

a) Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.

b) Montrer que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} g$.

c) Dans quel cas peut-on conclure que $g = f^{-1}$?

d) Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$.

115. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E tels que $v = u \circ v \circ u$.

a) Montrer que $\ker u \subset \ker v$ et $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} u$.

b) Prouver que si v est bijective, alors u l'est aussi.

c) On suppose que u est un projecteur. Montrer que $u \circ v = v \circ u = v$.

d) On suppose que u est une symétrie. Montrer que $u \circ v = v \circ u$.

116. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles et f l'application de E dans E qui à toute suite u de E associe la suite v telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) Déterminer le noyau de f.

c) A l'aide d'un judicieux télescopage, montrer que f est surjective.

117. Soit $f : x \mapsto x$, $g : x \mapsto \ln(1+x^2)$ et $h : x \mapsto x\ln(1+x^2)$. Prouver que la famille (f, g, h) est libre.

Plus généralement, si f et g sont deux fonctions non nulles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la famille (f, g, fg) est-elle libre ?

118. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A et B deux parties de E contenant le vecteur nul. Comparer (au sens de l'inclusion) :

a) $\operatorname{Vect} A \cup \operatorname{Vect} B$ et $\operatorname{Vect}(A \cup B)$.

b) $\operatorname{Vect} A + \operatorname{Vect} B$ et $\operatorname{Vect}(A + B)$.

c) $\operatorname{Vect} A \cap \operatorname{Vect} B$ et $\operatorname{Vect}(A \cap B)$.

119. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on pose $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \setminus x + y = z + t = 0\right\}$.

a) Justifier que F est un espace vectoriel et en donner une base.

b) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ telle que $F \subset \ker f$ et f échange e_2 et e_4. Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

c) Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ telle que g commute avec f et $g(e_2) = e_2$. Déterminer les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ par g.

120. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

a) Montrer que $f \circ g$ est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\ker g$.

b) En déduire que $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g)$.

121. Soient $e_1=(1,2,3,4)$, $e_2=(1,1,1,3)$, $e_3=(2,1,1,1)$, $e_4=(-1,0,-1,2)$ et $e_5=(2,3,0,1)$.
On considère les sous-espaces F et G de $\mathbb{R}^4$ définis par $F=\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)$ et $G=\mathrm{Vect}(e_4,e_5)$.
   a) Déterminer les dimensions de F, G, $F\cap G$ et $F+G$.
   b) Existe-t-il deux entiers distincts i et j compris entre 1 et 3 tels que $H=\mathrm{Vect}(e_i,e_j)$ soit un supplémentaire de G ? Si oui, déterminer l'image de e_k (où k est l'entier compris entre 1 et 3 différent de i et j) par la projection sur G parallèlement à H.

Polynômes

122. A quelle condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, X^2+X+1 divise-t-il X^4+aX^2+bX+c ? Donner alors le quotient.

123. Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et $E=\left\{P\in\mathbb{C}_n[X]\setminus X^2+1 \,\middle|\, P-P(0)\right\}$.
   a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$.
   b) Déterminer une base et la dimension de E.
   c) Déterminer un supplémentaire de E dans $\mathbb{C}_n[X]$.

124. Soit $P=X^3+X^2+X+1$.
   a) Montrer que la famille $\mathcal{B}=(P,XP',X^2P'',X^3P''')$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
   b) Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ dans la base $\mathcal{B}$.

125. Factoriser X^5-5X^3+5X+2 sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sachant qu'il admet une racine double.

126. Soient $Q\in\mathbb{R}[X]$ non nul et unitaire, et $\varphi:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]:P\mapsto Q(X+1)P(X-1)+Q(X-1)P(X+1)$.
   a) Montrer que φ est linéaire.
   b) Si Q est de degré $p\in\mathbb{N}$, donner le degré et le coefficient dominant de $\varphi(P)$ en fonction de ceux de P et Q.
   c) Déterminer le noyau de φ.
   d) Existe-t-il des valeurs de $n\in\mathbb{N}^*$ telles que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par φ.
   e) φ est-elle surjective ?

127. Montrer que $\left(1,X-2,X^2-4,X^3-8,\ldots,X^n-2^n\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer les coordonnées $(X-2)^n$ dans cette base.

128. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $\forall\,(z,z')\in\mathbb{C}^2$, $P(z+z')=P(z)+P(z')$.
On commencera par montrer que si P admet une racine non nulle alors il admet une infinité de racines.

129. On pose $P=X^{10}-2X^9+X^8-2X^6+4X^5-2X^4+X^2-2X+1$.
   a) Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 dans P.
   b) Factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

130. On pose $P = X^3 + aX + b$ avec a et b réels.

a) Montrer que P admet une racine au moins double si et seulement si $4a^3 + 27b^2 = 0$.

b) Discuter le nombre de racines réelles de P.

131. Soient $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul et unitaire, et $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] : P \mapsto Q(X+1)P(X-1) + Q(X-1)P(X+1)$.

a) Montrer que φ est linéaire.

b) Si Q est de degré $p \in \mathbb{N}$, donner le degré et le coefficient dominant de $\varphi(P)$ en fonction de ceux de P et Q.

c) Déterminer le noyau de φ.

d) Existe-t-il des valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ telles que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par φ.

e) φ est-elle surjective ?

132. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $\forall\, (z, z') \in \mathbb{C}^2$:

$$P(zz') = P(z)P(z').$$

☺ *On pourra commencer par supposer que* P *admet une racine non nulle*.

133. Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et $E = \left\{ P \in \mathbb{C}_n[X] \setminus X^2 + 1 \,\middle|\, P - P(0) \right\}$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$.

b) Déterminer une base et la dimension de E.

c) Déterminer un supplémentaire de E dans $\mathbb{C}_n[X]$.

Matrices

134. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Calculer A^n pour tout entier naturel n. ☺ *Ecrire* $A = I_3 + N$ …

135. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : M \mapsto A\,{}^t M + M\,{}^t A$.

a) Montrer que φ est linéaire.

b) Prouver que $\operatorname{Im} \varphi \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

c) On prend ici $n = 2$ et A antisymétrique. Déterminer le noyau et l'image de φ.

136. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice qui commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est une matrice scalaire (de la forme λI_n).

☺ *On considérera des produits* AB *et* BA *pour* B *élémentaire bien choisie*.

137. Soit $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Donner le rang de A et montrer qu'il existe un entier naturel n tel que A^n est semblable à $4\,\mathrm{diag}(1,1,0)$.

138. Soit $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P\in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $P(A)=0_n$.
Montrer que si $P(0)\neq 0$ alors A est inversible. La réciproque est-elle vraie ?

139. Soit $\varphi:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}^3\,;P\mapsto\left(P(0),P'(1),\int_0^1 P(t)dt\right)$. Donner la matrice de φ dans les bases canoniques des espaces considérés et déterminer le rang de cette matrice.

140. Soit $m\in\mathbb{C}$ et $A_m=\begin{pmatrix}1 & 1 & m\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & m & -1\end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A_m soit inversible et, dans ce cas, calculer son inverse.

141. Soit $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2-3A+2I_n=0_n$.
Montrer que la matrice A est inversible, puis prouver qu'elle semblable à une matrice de la forme $\mathrm{diag}(2,...,2,1,...,1)$.

142. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $\forall\, k\in [\![0,n]\!]$, $P_k=X^n+X^k+1$. Montrer que $\mathcal{B}=\left(P_0,P_1,...,P_n\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner la matrice P de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$, celle de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_c$, puis la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection sur $\mathrm{Vect}\left(X^n\right)$ parallèlement à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

143. Soient $A\in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B\in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) Déterminer les rangs de *A* et *B*.
b) Calculer BA en remarquant que $(AB)^2=AB$.

144. Soient A, B, C et D des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $E=(A\,|\,B)$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$ obtenue en accolant les colonnes de *B* à droite de celles de *A*, $F=\begin{pmatrix}A\\ \hline C\end{pmatrix}$ la matrice de $\mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{R})$ obtenue en accolant les lignes de *C* en dessous de celles de *A*, et $G=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, définie par blocs.

a) Prouver que : $rg(E)=rg(A)\iff \exists\, U\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ B=AU$.
b) Prouver que : $rg(F)=rg(A)\iff \exists\, V\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ C=VA$.
c) Prouver que : $rg(G)=rg(A)\iff \exists\,(U,V)\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ B=AU$, $C=VA$ et $D=VAU$.

145. Soit $(A,B)\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

a) Prouver que A est équivalente à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & I_r \end{pmatrix}$.

b) Montrer qu'il existe $(U,V)\in GL_n(\mathbb{K})^2$ tel que $rg(UA+BV)=\min\big(n, rg(A)+rg(B)\big)$.

146. Soit f un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3 vérifiant $f^3+f=0$.

a) Prouver que $\ker f \oplus \ker(f^2+id_E)=E$.

b) Justifier que $\dim\big(\ker(f^2+id_E)\big)\geq 1$. Soit alors e_1 un vecteur non nul de $\ker(f^2+id_E)$. Montrer que $\big(e_1, f(e_1)\big)$ est libre. On suppose qu'il existe $e_2\in\ker(f^2+id_E)$ tel que la famille $\big(e_1, f(e_1), e_2\big)$ est libre, montrer qu'alors $\big(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2)\big)$ est libre aussi. En déduire la dimension de $\ker(f^2+id_E)$.

c) Déterminer une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Systèmes et déterminants

147. Résoudre suivant la valeur de $m\in\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} x-y+z=m \\ x+my-z=1 \\ x-y-z=1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x-y+z=m \\ x+my-t=1 \\ x-z-t=1 \end{cases}$

148. Calculer, suivant les valeurs de a, b et c, le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$.

149. Résoudre, suivant les valeurs des nombres complexes a et b, le système :

$$\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$$

150. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+\ldots+x_{n-1}+x_n=1 \\ x_1+2x_2+2x_3+2x_4+\ldots+2x_{n-1}+2x_n=2 \\ x_1+2x_2+3x_3+3x_4+\ldots+3x_{n-1}+3x_n=3 \\ \quad\vdots \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4+\ldots+(n-1)x_{n-1}+(n-1)x_n=n-1 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4+\ldots+(n-1)x_{n-1}+nx_n=n \end{cases}$$

151. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ avec $n > p$. Montrer que $\det(AB) = 0$.

152. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = ((-1)^{i+j} a_{i,j})$. Montrer que $\det A = \det B$.

153. Calculer sous la forme la plus factorisée possible $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}$.

154. Soient a et b deux réels, $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det B = 1$. Calculer $\det\left((AB)^p\right)$ pour tout entier p strictement positif.

155. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos na & \cos(n+1)a & \cos(n+2)a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la matrice A soit inversible.

156. Soit $n \in \mathbb{N}$ et Q un polynôme fixé de $\mathbb{R}_n[X]$. On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et on définit :

$$u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]\,;\, P \mapsto \sum_{k=0}^{n} \det_{\mathcal{B}_c}(Q, Q', \ldots, Q^{(k-1)}, P, Q^{(k+1)}, \ldots, Q^{(n)})\, X^k .$$

a) Montrer que u est linéaire.

b) Prouver que u est un automorphisme si et seulement si $\deg Q = n$.

c) Exprimer $\det u$ en fonction de n et du coefficient dominant de Q.

157. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$ telle que $\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A + M) = \det(A) + \det(M)$.

a) En calculant $\det(2A)$ de deux façons, montrer que $\det(A) = 0$.

b) Prouver que si A n'est pas nulle, il existe une matrice M inversible dont une des colonnes est l'opposée d'une colonne de A.

c) En déduire que $A = 0_n$.

Espaces préhilbertiens réels et euclidiens

158. Prouver les inégalités :

a) $\dfrac{n(n-1)}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(n-k)^2} \geq \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n-k}\right)^2$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2 c_k}$ où les a_k, b_k, c_k sont des réels avec $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, $c_k \geq 0$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln x_k)^2 \geq n\left[\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}\right)\right]^2$ où les x_k sont des réels strictement positifs.

159. Soit E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel muni d'une norme notée $\|\cdot\|$. Montrer que cette norme est euclidienne si et seulement si l'application de $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}\,;\,(x,y) \mapsto \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$ est bilinéaire.

Application : Soit N l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $N\big((x,y)\big) = \sqrt{x^2 - xy + y^2}$.

Prouver que N est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

160. On appelle E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n^2$ converge.

Montrer que E est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et que l'application de $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}\,;\,(u,v) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur E.

Probabilités

161. On considère n coffres numérotés de 1 à n. Il y a une probabilité p pour qu'un trésor se trouve à l'intérieur d'un de ces coffres. On a ouvert les $n-1$ premiers coffres qui se sont révélés vides. Quelle est la probabilité que le trésor soit dans le dernier coffre ?

162. On dispose d'un jeu usuel de 32 cartes (quatre couleurs, huit niveaux). On tire trois cartes et on les regarde. S'il y a au moins un as, on en tire une de plus, sinon on en tire deux de plus.

a) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un as à l'issue des deux tirages ?

b) Quelle est la probabilité d'avoir exactement quatre rois à l'issue des deux tirages ?

c) Les deux évènements ci-dessus sont-ils indépendants ?

163. Soient Ω un univers muni d'une loi de probabilité P et 2 évènements A et B de même probabilité $\frac{3}{5}$.

a) Les évènements A et B peuvent-ils être incompatibles ?

b) Donner un encadrement de $P(A \cap B)$.

c) Soit C un troisième évènement incompatible avec A et tel que $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$.

Donner un encadrement de $P(C)$.

164. Un site marchand sur internet possède un service de fraude pour contrôler l'authenticité d'une commande. En effet, 5 % des commandes passées sur le site se révèlent être frauduleuses (carte de crédit volée, usurpation d'identité, etc.). L'équipe du service de fraude du site est composée de deux personnes : Marcel et Gontran. Marcel, plus ancien dans le service, étudie 60 % des commandes passées et Gontran les autres. Cette répartition étant faite au hasard, une commande est traitée par Marcel ou Gontran indépendamment de son honnêteté ou pas. Comme il est habitué, Marcel détecte 90 % des commandes frauduleuses, mais, revers de la médaille, il va vite et se trompe une fois sur cinq sur les commandes honnêtes. Nouvel arrivant dans le service, Gontran ne repère que 75 % des commandes frauduleuses. Cependant, plus méticuleux que Marcel, il valide 85 % des commandes honnêtes.

a) Quelle est la probabilité qu'une commande soit jugée correctement par le service ?

b) Marcel vient de valider une commande. Quelle est la probabilité qu'il ait eu tort ?

165. Marcel, Gontran et Cunégonde chassent ensemble. Marcel atteint sa cible une fois sur deux, Gontran une fois sur trois et Cunégonde, tireuse émérite, dans 80 % des cas.

a) Un oiseau passe, Marcel, Gontran et Cunégonde trient en même temps. Quelle est la probabilité que le malheureux volatile s'en tire ?

b) L'oiseau est touché une fois. Quelle est la probabilité que ce soit par le tir de Marcel.

c) L'oiseau est touché deux fois. Quelle est la probabilité que l'un des deux tirs soit celui de Marcel.

166. On pioche au hasard 3 atouts parmi les 21 atouts d'un jeu de tarot (cartes numérotées de 1 à 21).

a) Quelle est la probabilité des évènements suivants :
   - Aucune carte n'est multiple de 5.
   - Au moins une carte est multiple de 5.
   - Exactement une carte est multiple de 5.

b) On retourne la première carte choisie, c'est un multiple de 5. Quelle est la probabilité d'en avoir un autre.

c) On retourne la première carte choisie, ce n'est pas un multiple de 5. On en pioche alors une autre, quelle est la probabilité que la nouvelle carte soit un multiple de 5.

167. Soient X et Y deux var indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On pose $S=\max(X,Y)$.

a) Déterminer la loi du couple (S,X).

b) En déduire la loi de S et son espérance, ainsi que celle de X.

c) On pose $T=\min(X,Y)$. Déterminer $E(T)$ et $E(ST)$ sans calculs supplémentaires.

d) Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

168. Soient X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2. Montrer que pour tout réel $a>0$:

$$P(\mu-a\sigma< X <\mu+a\sigma)\geq 1-\frac{1}{a^2}.$$

169. Soient X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $b(k,n,p) = P(X = k)$.

a) En étudiant la suite $\left(b(k,n,p)\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$, déterminer la valeur de k pour laquelle $b(k,n,p)$ est maximale. On note m cette valeur.

b) Etudier les variations de $f : x \mapsto x^m(1-x)^{n-m}$ sur $[0,1]$.

c) Vérifier que si $m \in [np,(n+1)p]$, alors $b\left(m,n,\dfrac{m}{n+1}\right) \le b(m,n,p) \le b\left(m,n,\dfrac{m}{n}\right)$.

d) Proposer un encadrement analogue pour $m \in [(n+1)p-1, np]$.

e) A l'aide de la formule de Stirling, donner un équivalent simple de $b(m,n,p)$.

170. Soient r et n deux entiers naturels tels que $1 \le r \le n$. Un placard contient n paires de chaussures. On tire au hasard, $2r$ chaussures du placard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de paires complètes parmi les chaussures tirées. Les paires du placard sont numérotées de 1 à n. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si les deux chaussures de la paire n° i se trouvent parmi les chaussures tirées, et 0 sinon.

a) Déterminer la loi de X_i et démontrer que $E(X_i) = \dfrac{r(2r-1)}{n(2n-1)}$.

b) Exprimer X en fonction des X_i, en déduire $E(X)$.

171. Soient X et Y deux var indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

a) Déterminer l'espérance de $\min(X,Y)$.

b) En déduire celles de $\max(X,Y)$ et $|X-Y|$

172. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Cette urne est magique, pour tout entier k compris entre 1 et n, la probabilité de tirer la boule numéro k est proportionnelle à k. On note X la variable aléatoire donnant le numéro de la boule tirée.

a) Déterminer la loi de X.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

c) Calculer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{X}$.

173. Un archer tire sur n cibles. A chaque tir, il a la probabilité p de toucher la cible et les tirs sont supposés indépendants. Il tire une première fois sur chaque cible successivement et on note X le nombre de cibles atteintes lors de ce premier jet. L'archer tire ensuite une seconde fois sur les cibles restantes et on note Y le nombre de cibles touchés lors de cette seconde tentative.

Déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$.