DM de Mathématiques n° 6

Pour tout entier naturel *n*, on note g_n la fonction :

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; x \mapsto x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction g_n est intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2) Pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n(a) = \int_0^a g_n(t)\,dt$ et $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt = \lim\limits_{a \to +\infty} I_n(a)$.

   a. Etablir une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n+2}(a)$, et en déduire une relation entre I_n et I_{n+2}.

   b. Montrer que $I_0 = \lim\limits_{A \to +\infty} \sqrt{2}\int_0^A e^{-u^2}\,du$, et en déduire la valeur de I_0 à l'aide de l'intégrale de Gauss.

   c. Calculer I_1.

   d. Calculer I_{2p} et I_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.

3) Prouver que pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $q \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{2q}(a) = \frac{(2q)!}{2^q q!}\left(\int_0^a e^{-t^2/2}\,dt - e^{-\frac{a^2}{2}}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{2^k k!}{(2k+1)!}a^{2k+1}\right) \quad \text{et} \quad I_{2q+1}(a) = 2^q q!\left(1 - e^{-\frac{a^2}{2}}\sum_{k=0}^{q}\frac{a^{2k}}{2^k k!}\right).$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_n la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ \dfrac{1}{I_n} g_n(x) & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$.

   a. Montrer que f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

   b. Prouver que f_n est une densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n admet f_n comme densité de probabilité.

5) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, X_n admet un moment d'ordre *p* et donner ce moment à l'aide des intégrales I_k définies plus haut. En déduire que X_n admet une espérance et une variance, puis préciser leur valeur en fonction de *n*.

6) Justifier que pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}$, on a $P(a \leq X_n \leq b) = \int_a^b f_n(t)\,dt$.

7) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel *a*. Calculer $P(X_n \leq a)$, $P(X_n = a)$ et $P(X_n \geq a)$.

   On exprimera les résultats à l'aide de $I_n(a)$ et I_n sans remplacer par les expressions obtenues dans les questions précédentes.

8) Calculer $P(X_1 \leq X_2)$, $P(X_1 = X_2)$ et $P(X_1 \geq X_2)$.

Quelques notions de probabilités continues

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- La fonction de répartition de X est la fonction $F : x \mapsto P\left(X \leq x\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.
  On a alors pour tout $\left[a,b\right] \subset \mathbb{R}$, on a $P\left(a \leq X \leq b\right) = F(b) - F(a)$.
- On dit que X est une variable à densité si sa fonction de répartition F est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $f = F'$ est alors appelée densité de probabilité de X.
- Une fonction h est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si elle est continue par morceaux, positive ou nulle, intégrable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\int_{\mathbb{R}} h = 1$.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, une variable à densité f sur $\mathbb{R}$ admet un moment d'ordre p si la fonction $t \mapsto t^p f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, le moment d'ordre p est $\int_{-\infty}^{+\infty} t^p f(t)\,dt$.
- Les propriétés usuelles des variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs perdurent pour les variables à densité sur $\mathbb{R}$.
- Si X et Y sont deux variables à densité sur $\mathbb{R}$, indépendantes et de densités respectives f_X et f_Y, alors $X + Y$ est une variable à densité sur $\mathbb{R}$, de densité $f_{X+Y} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_X(t) f_Y(x-t)\,dt$.