Corrigé du DS n° 4

Mines-Ponts – PSI – 2007 – Maths 1

I Préliminaires

1 - Soient $M \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{K})$. On a $MN \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{m} \left|MN(i,j)\right| = \sum_{j=1}^{m} \left|\sum_{k=1}^{r} M(i,k)N(k,j)\right| \leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} \left|M(i,k)N(k,j)\right|.$$

Et :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} \left|M(i,k)N(k,j)\right| &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} \left|M(i,k)\right|\left|N(k,j)\right| \\ &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} \left|M(i,k)\right|\left|N(k,j)\right| \\ &= \sum_{k=1}^{r}\left(\left|M(i,k)\right|\sum_{j=1}^{m}\left|N(k,j)\right|\right)\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\left|N(k,j)\right| \leq \|N\| = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|N(i,j)\right|\right)$, donc :

$$\sum_{j=1}^{m}\left|MN(i,j)\right| \leq \sum_{k=1}^{r}\left(\left|M(i,k)\right|\|N\|\right) = \left(\sum_{k=1}^{r}\left|M(i,k)\right|\right)\|N\|.$$

Enfin, $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\left|M(i,k)\right| \leq \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{k=1}^{r}\left|M(i,k)\right|\right) = \|M\|$, donc :

$$\sum_{j=1}^{m}\left|MN(i,j)\right| \leq \|M\|\|N\|.$$

Ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on obtient $\displaystyle\max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|MN(i,j)\right|\right) \leq \|M\|\|N\|$, soit :

$$\boxed{\|MN\| \leq \|M\|\|N\|}$$

2 - Comme P est une matrice stochastique, on a pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$, $P(i,j) \geq 0$, donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left|P(i,j)\right| = \sum_{j=1}^{n} P(i,j) = 1$. Ainsi, $\displaystyle\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\left|P(i,j)\right| = 1$, soit :

$$\boxed{\|P\| = 1}$$

3 - Commençons par prouver que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique. Soient A et B deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a alors :

- pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $A(i,j) \geq 0$ et $B(i,j) \geq 0$, donc $AB(i,j) = \sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,j) \geq 0$;
- pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{n} AB(i,j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,j) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A(i,k)B(k,j)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(A(i,k)\sum_{j=1}^{n} B(k,j)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(A(i,k)\times 1\right) = \sum_{k=1}^{n} A(i,k) = 1$$

Ainsi, AB est bien stochastique.

Prouvons alors par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, P^k est stochastique.

Initialisation : Par hypothèse, $P^1 = P$ est stochastique, donc la propriété est vraie au rang $k = 1$.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}^*$.

Alors, comme P et P^k sont stochastiques (par hypothèse pour P et par hypothèse de récurrence pour P^k), $P^k P = P^{k+1}$ est elle aussi stochastique d'après ce qui précède.

Ainsi, la propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$\boxed{P^k \text{ est stochastique.}}$$

II Pseudo-inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

Rappelons que par définition, $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} a$ et $\ker A = \ker a$, et comme $A^2 = \left(M_{\mathcal{B}_c}(a)\right)^2 = M_{\mathcal{B}_c}(a^2)$ où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a aussi $\operatorname{Im} A^2 = \operatorname{Im} a^2$ et $\ker A^2 = \ker a^2$.

4 - On suppose que A admet un pseudo-inverse A'.

On a toujours $\operatorname{Im} A^2 \subset \operatorname{Im} A$, donc montrer que $rg\,(A^2) = rg\,(A)$ revient à montrer que $\operatorname{Im} A^2 = \operatorname{Im} A$ et même seulement que $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} A^2$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on veut prouver que $AX \in \operatorname{Im} A^2$. On a $A'A = AA'$ et $A = AA'A$, donc :

$$AX = AA'AX = AAA'X = A^2A'X \in \operatorname{Im} A^2.$$

Ainsi, $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} A^2$, donc $\operatorname{Im} A^2 = \operatorname{Im} A$, ce qui entraine que $\operatorname{Im} a^2 = \operatorname{Im} a$ et :

$$\boxed{rg\,(a^2) = rg\,(a)}$$

5 - On veut $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} A \oplus \ker A$. Par le théorème du rang, on a déjà :

$$n = \dim \mathbb{R}^n = rg\,(A) + \dim\left(\ker A\right).$$

Il suffit donc de prouver que $\operatorname{Im} A \cap \ker A = \{0\}$. Soit $X \in \operatorname{Im} A \cap \ker A$.

Comme $X \in \operatorname{Im} A$, on a $X = AZ$ avec $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et comme $X \in \ker A$, on a $AX = 0$.

Ainsi, $AX = A^2 Z = 0$, donc $Z \in \ker A^2$.

On a toujours $\ker A \subset \ker A^2$. Or, $rg\,(A^2) = rg\,(A)$, donc avec le théorème du rang, on obtient :

$$\dim\left(\ker A\right) = n - rg\,(A) = n - rg\,(A^2) = \dim\left(\ker A^2\right).$$

Ainsi, $\ker A \subset \ker A^2$ et les deux sous-espaces ont la même dimension donc $\ker A = \ker A^2$.

On avait $Z \in \ker A^2$, donc $Z \in \ker A$ et ainsi, $X = AZ = 0$. Ceci prouve que :

$$\operatorname{Im} A \cap \ker A = \{0\}.$$

Ainsi, $\operatorname{Im} A \cap \ker A = \{0\}$ et $rg\,(A) + \dim\left(\ker A\right) = \dim \mathbb{R}^n$, donc :

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} A \oplus \ker A = \operatorname{Im} a \oplus \ker a}$$

6 - Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de $\operatorname{Im} A$ et $\ker A$ respectivement. Alors, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} A \oplus \ker A$.

Les sous espaces $\operatorname{Im} A$ et $\ker A$ sont stables par a. Si on appelle a_1 et a_2 les endomorphismes induits par a sur $\operatorname{Im} A$ et $\ker A$ respectivement, on a $M_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{B}_1}(a_1) & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & M_{\mathcal{B}_2}(a_2) \end{pmatrix}$ avec $r = rg\,(A)$. De plus, $a_2 = 0$ donc $M_{\mathcal{B}_2}(a_2) = 0_{n-r,n-r}$ et, en notant $B = M_{\mathcal{B}_1}(a_1) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, on a alors :

$$M_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} B & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

De plus, on a $\ker a_1 = \{x \in \operatorname{Im} A \setminus a_1(x) = a(x) = 0\} = \operatorname{Im} A \cap \ker A = \{0\}$, donc $a_1 \in GL(\operatorname{Im} A)$, soit $B \in GL_r(\mathbb{R})$.

Comme les matrice s $M_{\mathcal{B}}(a)$ et $A = M_{\mathcal{B}_c}(a)$ représentent le même endomorphisme a dans deux bases de $\mathbb{R}^n$, elles sont semblables et finalement, avec $r = rg\,(A)$:

$$\boxed{\text{Il existe } B \in GL_r(\mathbb{R}) \text{ et } W \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ telles que } A = W \begin{pmatrix} B & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} W^{-1}.}$$

7 - Posons $A'=W\begin{pmatrix} B^{-1} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}W^{-1}$. On a :

- $A'A=W\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}W^{-1}=AA'$;
- $AA'A=W\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}W^{-1}W\begin{pmatrix} B & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}W^{-1}=W\begin{pmatrix} B & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}W^{-1}=A$;
- $A'AA'=W\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}W^{-1}W\begin{pmatrix} B^{-1} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}W^{-1}=W\begin{pmatrix} B^{-1} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}W^{-1}=A'$.

On a $A'A=AA'$, $A=AA'A$ et $A'=A'AA'$, donc A' est un pseudo-inverse de A, et ainsi :

$$\boxed{A \text{ admet au moins un pseudo-inverse.}}$$

8 - Comme $A'A=AA'$, on a $a'a=aa'$ et donc :

$$\boxed{\operatorname{Im} a \text{ et } \ker a \text{ sont stables par } a'.}$$

La matrice de a' dans la base $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ introduite dans la question 6 est alors de la forme $M_{\mathcal{B}}(a')=\begin{pmatrix} M_{\mathcal{B}_1}(a_1') & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & M_{\mathcal{B}_2}(a_2') \end{pmatrix}$ où a_1' et a_2' les endomorphismes induits par a sur $\operatorname{Im} A$ et $\ker A$ respectivement.

Si $X\in\ker A$, on a :

$$A'X=A'AA'X=A'A'AX=(A')^2 0=0.$$

Donc $a_2'=0$, soit $M_{\mathcal{B}_2}(a_2')=0_{n-r,n-r}$ et en posant $D=M_{\mathcal{B}_1}(a_1')\in\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, on obtient :

$$M_{\mathcal{B}}(a')=\begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Avec $W=P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$, la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$, on a alors $M_{\mathcal{B}_c}(a')=W\left(M_{\mathcal{B}}(a')\right)W^{-1}$, soit :

$$\boxed{A'=W\begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}W^{-1}}$$

9 - On a $A=AA'A$, donc $a=aa'a$ et :

$$aa'=aa'aa'=(aa')^2.$$

Comme aa' est linéaire :

$$\boxed{aa' \text{ est un projecteur.}}$$

On a $\operatorname{Im} aa' \subset \operatorname{Im} a$ et comme $a = aa'a$, on a $\operatorname{Im} a = \operatorname{Im} aa'a \subset \operatorname{Im} aa'$, donc :

$$\boxed{\operatorname{Im} aa' = \operatorname{Im} a}$$

On a $\ker a \subset \ker a'a$. Avec $a = aa'a$, si $x \in \ker a'a$, on a $a(x) = aa'a(x) = a(0) = 0$, donc $x \in \ker a$. Ainsi, $\ker a'a \subset \ker a$ et donc, $\ker a'a = \ker a$. Or, $a'a = aa'$, d'où :

$$\boxed{\ker aa' = \ker a}$$

Ainsi, aa' est le projecteur sur $\operatorname{Im} a$, parallèlement à $\ker a$, donc dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} A \oplus \ker A$ introduite plus haut, on a :

$$M_{\mathcal{B}}(aa') = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Avec $W = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$, la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$, on a :

$$AA' = M_{\mathcal{B}_c}(a) M_{\mathcal{B}_c}(a') = M_{\mathcal{B}_c}(aa') = W\left(M_{\mathcal{B}}(aa')\right)W^{-1}.$$

Soit, $W^{-1}\left(AA'\right)W = M_{\mathcal{B}}(aa')$ et donc :

$$\boxed{W^{-1}\left(AA'\right)W = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}}$$

10 - On a $A = W\begin{pmatrix} B & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}W^{-1}$ (question 6) et $A' = W\begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}W^{-1}$ (question 8), donc :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} &= W^{-1}\left(AA'\right)W = \left(W^{-1}AW\right)\left(W^{-1}A'W\right) \\ &= \begin{pmatrix} B & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BD & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ceci donne $BD = I_r$ et donc $D = B^{-1}$.

Ainsi, si A admet un pseudo-inverse A', alors $A' = W\begin{pmatrix} B^{-1} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}W^{-1}$ et donc :

$$\boxed{A \text{ admet au plus un pseudo-inverse.}}$$

III Calcul de X_∞

11 - Pour tout $z \in \mathbb{C}^n$, il existe $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $z = x + iy$ et, avec $a(x), a(y) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} a_c \circ a_c(z) &= a_c \circ a_c(x+iy) = a_c\left(a_c(x+iy)\right) = a_c\left(a(x) + ia(y)\right) = a_c\left(a(x)\right) + ia_c\left(a(y)\right) \\ &= a\left(a(x)\right) + ia\left(a(y)\right) = a^2(x) + ia^2(y) = (a^2)_c(x+iy) = (a^2)_c(z) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}^n$, $a_c \circ a_c(z) = (a^2)_c(z)$, donc :

$$\boxed{a_c \circ a_c = (a^2)_c}$$

12 - On a $a_c \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Si on note $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a $a_c(\varepsilon_k) = a(\varepsilon_k)$ (car les coordonnées de ε_k valent 0 ou 1, donc sont réelles). Ainsi, la matrice de a_c dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est celle de a dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire A.

On a donc :

$$\chi_{a_c} = \det\left(X I_n - A\right) = \chi_a .$$

On obtient de même $\chi_{(a^2)_c} = \chi_{a^2}$ et comme d'après la question 11, $a_c^2 = (a^2)_c$, on a $\chi_{a_c^2} = \chi_{a^2}$.

Rappelons que P est une matrice stochastique, strictement positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème 1 admis, 1 est valeur propre simple de P, donc 0 valeur propre simple de $A = I_n - P$, autrement dit, 0 est racine simple de $\chi_{a_c} = \chi_a$.

Or, on a :

$$\begin{aligned}\chi_{a^2}(X^2) &= \det\left(X^2 I_n - A^2\right) = \det\left[\left(X I_n - A\right)\left(X I_n + A\right)\right] \\ &= \det\left(X I_n - A\right)\det\left(X I_n + A\right) \\ &= (-1)^n \det\left(X I_n - A\right)\det\left(-X I_n - A\right) = (-1)^n \chi_a(X)\chi_a(-X)\end{aligned}$$

Comme 0 est de multiplicité 1 dans $\chi_a(X)$, donc aussi dans $\chi_a(-X)$, 0 est de multiplicité 2 dans $\chi_a(X)\chi_a(-X)$, donc dans $\chi_{a^2}(X^2)$, et ainsi, 0 est de multiplicité 1 dans $\chi_{a^2}(X)$.

Ainsi, 0 est de multiplicité 1 dans $\chi_{a_c} = \chi_a$ et $\chi_{a_c^2} = \chi_{a^2}$, ce qui implique que :

$$\dim\ker a_c^2 = \dim\ker a^2 = \dim\ker a_c = \dim\ker a = 1 .$$

Avec le théorème du rang, on obtient :

$$rg\,(a_c^2) = n - \dim\ker a_c^2 = n - \dim\ker a_c = rg\,(a_c) .$$

Et comme, on a toujours $a_c^2(\mathbb{C}^n) = \operatorname{Im} a_c^2 \subset \operatorname{Im} a_c = a_c(\mathbb{C}^n)$, on obtient bien :

$$\boxed{a_c^2(\mathbb{C}^n) = a_c(\mathbb{C}^n)}$$

13 - On vient d'établir que $\dim\ker a^2 = \dim\ker a = 1$, donc d'après le théorème du rang :

$$\boxed{rg\,(a^2) = rg\,(a) = n - 1}$$

D'après la partie précédente, $rg\,(a^2) = rg\,(a)$ implique l'existence d'un unique pseudo-inverse de A, que l'on nomme A'.

14 - Soit $C\in GL_n(\mathbb{R})$. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=0}^{k-1}(I_n-C)^j\right)C&=\left(\sum_{j=0}^{k-1}(I_n-C)^j\right)\big(I_n-(I_n-C)\big)\\&=\sum_{j=0}^{k-1}(I_n-C)^j-\left(\sum_{j=0}^{k-1}(I_n-C)^j\right)(I_n-C)\\&=\sum_{j=0}^{k-1}(I_n-C)^j-\sum_{j=0}^{k-1}(I_n-C)^{j+1}\\&=\sum_{j=0}^{k-1}\left[(I_n-C)^j-(I_n-C)^{j+1}\right]\\&=(I_n-C)^0-(I_n-C)^{k-1+1}\qquad\text{par télescopage}\\&=I_n-(I_n-C)^k\end{aligned}$$

Et comme C est inversible, on peut écrire, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1}(I_n-C)^j=\big(I_n-(I_n-C)^k\big)C^{-1}}$$

15 - On a $A=I_n-P$, donc $P=I_n-A$.

Procédons par récurrence sur $k\in\mathbb{N}^*$.

Initialisation : On a :

$$\sum_{j=0}^{1-1}P^j=P^0=I_n\quad\text{et}\quad(I_n-P)A'+\big(I_n-AA'\big)=AA'+I_n-AA'=I_n.$$

La propriété est donc vraie au rang $k=1$.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $k\in\mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\sum_{j=0}^{k}P^j=I_n+\sum_{j=1}^{k}P^j=I_n+\sum_{j=0}^{k-1}P^{j+1}=I_n+\left(\sum_{j=0}^{k-1}P^j\right)P$$

Par hypothèse de récurrence, $\sum_{j=0}^{k-1}P^j=(I_n-P^k)A'+k\big(I_n-AA'\big)$, donc :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k}P^j&=I_n+\Big((I_n-P^k)A'+k\big(I_n-AA'\big)\Big)P\\&=I_n+A'P-P^kA'P+k\big(P-AA'P\big)\end{aligned}$$

Or, A et A' commutent, donc $P=I_n-A$ commute avec A', d'où :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k}P^j&=I_n+A'P-P^kPA'+k\big(P-AA'P\big)\\&=I_n+A'(I_n-A)-P^{k+1}A'+k\big((I_n-A)-AA'(I_n-A)\big)\\&=I_n+A'-A'A-P^{k+1}A'+k\big(I_n-A-AA'+AA'A\big)\end{aligned}$$

Avec $A'A = AA'$ et $AA'A = A$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k} P^j &= I_n + A' - AA' - P^{k+1}A' + k\left(I_n - A - AA' + A\right)\\ &= A' - P^{k+1}A' + I_n - AA' + k\left(I_n - AA'\right)\\ &= (I_n - P^{k+1})A' + (k+1)\left(I_n - AA'\right)\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} P^j = (I_n - P^k)A' + k\left(I_n - AA'\right)}$$

16 - D'après la question précédente, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j = \frac{1}{k}(I_n - P^k)A' + I_n - AA'.$$

Et en utilisant la norme introduite dans l'énoncé, on a :

$$\left\|\frac{1}{k}(I_n - P^k)A'\right\| \leq \frac{1}{k}\left\|I_n - P^k\right\|\|A'\| \leq \frac{1}{k}\left(\|I_n\| + \left\|P^k\right\|\right)\|A'\|.$$

Prouvons alors par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left\|P^k\right\| \leq 1$.

Initialisation : D'après la question 2, $\left\|P^1\right\| = \|P\| = 1$, donc la propriété est vraie au rang $k = 1$.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}^*$. On a alors d'après la question 1 :

$$\left\|P^{k+1}\right\| = \left\|P^k P\right\| \leq \left\|P^k\right\|\|P\| \leq 1 \times 1 = 1.$$

Ainsi, la propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\|\frac{1}{k}(I_n - P^k)A'\right\| \leq \frac{\left(\|I_n\| + 1\right)\|A'\|}{k}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \frac{\left(\|I_n\| + 1\right)\|A'\|}{k} = 0$, on a par comparaison, $\displaystyle\lim_{k \to +\infty}\left\|\frac{1}{k}(I_n - P^k)A'\right\| = 0$, soit :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k}(I_n - P^k)A' = 0.$$

Et avec $\displaystyle\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j = \frac{1}{k}(I_n - P^k)A' + I_n - AA'$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j = I_n - AA'}$$

17 - D'après la question 3, P^k est stochastique pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc tous ses coefficients sont positifs. Il en va de même pour $P^0 = I_n$, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les coefficients de $\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j$ sont des sommes de nombres positifs, donc sont positifs et comme $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j = I_n - AA'$, les coefficients de $I_n - AA'$ sont tous positifs, en tant que limites de suites de réels positifs.

De plus :

$$\begin{aligned}(I_n - AA')J_n &= J_n - AA'J_n = J_n - A'AJ_n \\ &= J_n - A'(I_n - P)J_n = J_n - A'(J_n - PJ_n) \\ &= J_n - A'0_n = J_n\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La matrice } I_n - AA' \text{ est bien stochastique.}}$$

De plus, par définition de A', on a $AA'A = A$, soit $A - AA'A = 0_n$ ou encore :

$$\boxed{(I_n - AA')A = 0_n}$$

18 - Soit $X \in \mathcal{K}_n$ quelconque.

Par linéarité à droite du produit matriciel, l'application $M \mapsto XM$ est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie, donc elle est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j = I_n - AA'$, on a :

$$\lim_{k \to +\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} X P^j\right) = \lim_{k \to +\infty} X\left(\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j\right) = X(I_n - AA')$$

Or, d'après le théorème 1 admis, on a $\lim_{k \to +\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} X P^j\right) = X_\infty$. Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{K}_n$:

$$X(I_n - AA') = X_\infty .$$

Si on prend $X = L_i = (0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0) \in \mathcal{K}_n$ où le 1 apparait en $i^{\text{ième}}$ position avec $i \in [\![1, n]\!]$, $L_i(I_n - AA') = X_\infty$ est la $i^{\text{ième}}$ ligne de $I_n - AA'$, donc toutes les lignes de $I_n - AA'$ sont égales à X_∞. Comme $J_n X_\infty$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les lignes sont égales à X_∞, on obtient bien :

$$\boxed{I_n - AA' = J_n X_\infty}$$