Corrigé du DM n° 6

1) La fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de telles fonctions. Elle est de plus positive sur $[0,+\infty[$.

Avec le changement de variable $X=\dfrac{x^2}{2}$, on a par croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 g_n(x)=\lim_{x\to+\infty} x^{n+2}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)=\lim_{X\to+\infty}\sqrt{2}^{n+2}X^{\frac{n+2}{2}}\exp(-X)=0.$$

Ainsi, $g_n(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ converge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}g_n(x)\,dx$ converge et ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } g_n \text{ est intégrable sur l'intervalle } [0,+\infty[.}$$

2) Soient $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $n\in\mathbb{N}$.

a. On a :

$$I_{n+2}(a)=\int_0^a g_{n+2}(t)\,dt=\int_0^a t^{n+2}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt=-\int_0^a t^{n+1}\left[-t\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right]dt.$$

A l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}I_{n+2}(a)&=-\left(\left[t^{n+1}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right]_0^a-\int_0^a(n+1)t^n\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt\right)\\&=-a^{n+1}\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right)+(n+1)\int_0^a t^n\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{I_{n+2}(a)=(n+1)I_n(a)-g_{n+1}(a)}$$

On a vu dans la question 1, que $g_{n+1}(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}g_{n+1}(a)=0$ et ainsi, en passant à la limite quand $a\to+\infty$ dans la relation précédente, on obtient :

$$\boxed{I_{n+2}=(n+1)I_n}$$

b. Pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, $I_0(a)=\displaystyle\int_0^a g_0(t)\,dt=\int_0^a e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$. Avec le changement de variable $u=\dfrac{t}{\sqrt{2}}$, on obtient :

$$I_0(a)=\int_0^{a/\sqrt{2}}e^{-u^2}\sqrt{2}\,du=\sqrt{2}\int_0^{a/\sqrt{2}}e^{-u^2}\,du.$$

Comme $I_0 = \lim_{a\to+\infty} I_0(a) = \sqrt{2} \lim_{a\to+\infty} \int_0^{a/\sqrt{2}} e^{-u^2}\, du$ et $A = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \xrightarrow[a\to+\infty]{} +\infty$, on a bien :

$$\boxed{I_0 = \sqrt{2} \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} e^{-u^2}\, du}$$

L'intégrale de Gauss donne $\lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} e^{-u^2}\, du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, donc :

$$\boxed{I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

c. On a :

$$I_1 = \lim_{a\to+\infty} I_1(a) = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \lim_{a\to+\infty}\left(\left[-\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right]_0^a\right) = \lim_{a\to+\infty}\left(1-\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right)\right).$$

Donc :

$$\boxed{I_1 = 1}$$

d. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, g_n est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ et si on avait $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)\, dt = 0$, alors g_n serait nulle sur $\mathbb{R}_+$, ce qui n'est pas. Donc, $I_n \neq 0$.

Avec le résultat de la question a, on peut alors écrire pour tout $p\in\mathbb{N}$:

$$\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} = 2p+1 \quad \text{et} \quad \frac{I_{2p+3}}{I_{2p+1}} = 2p+2 = 2(p+1).$$

Alors, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{I_{2p}}{I_0} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{I_{2k+2}}{I_{2k}} = \prod_{k=0}^{p-1} (2k+1) = 1\times 3\times\cdots\times(2p-1) = \frac{(2p)!}{2\times 4\times\cdots\times(2p)} = \frac{(2p)!}{2^p\, p!}$$

$$\frac{I_{2p+1}}{I_1} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{I_{2k+3}}{I_{2k+1}} = \prod_{k=0}^{p-1} \big(2(k+1)\big) = \prod_{k=1}^{p} (2k) = 2^p\, p!$$

Avec les valeurs de I_0 et I_1 trouvées plus haut (les formules restant vraies pour $p=0$), on obtient pour tout $p\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p\, p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = 2^p\, p!}$$

3) Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$I_1(a) = \int_0^a t\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \left[-\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right]_0^a = 1-\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right).$$

On a vu dans la question 2 qu'avec $I_n(a)=\int_0^a g_n(t)\,dt$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$I_{n+2}(a)=(n+1)I_n(a)-g_{n+1}(a)\,.$$

Pour $n=2q+1$, ceci se récrit :

$$\frac{I_{2(q+1)+1}(a)}{2^{q+1}(q+1)!}-\frac{I_{2q+1}(a)}{2^q q!}=-\frac{g_{2(q+1)}(a)}{2^{q+1}(q+1)!}\,.$$

Et par télescopage :

$$\frac{I_{2q+1}(a)}{2^q q!}-I_1(a)=\sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{I_{2(k+1)+1}(a)}{2^{k+1}(k+1)!}-\frac{I_{2k+1}(a)}{2^k k!}\right)=-\sum_{k=0}^{q-1}\frac{g_{2(k+1)}(a)}{2^{k+1}(k+1)!}$$

$$=-\sum_{k=1}^{q}\frac{g_{2k}(a)}{2^k k!}=-\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2^k k!}a^{2k}e^{-\frac{a^2}{2}}$$

Donc :

$$\frac{I_{2q+1}(a)}{2^q q!}=I_1(a)-\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2^k k!}a^{2k}e^{-\frac{a^2}{2}}=1-e^{-\frac{a^2}{2}}-e^{-\frac{a^2}{2}}\sum_{k=1}^{q}\frac{a^{2k}}{2^k k!}=1-e^{-\frac{a^2}{2}}\sum_{k=0}^{q}\frac{a^{2k}}{2^k k!}\,.$$

Ainsi :

$$\boxed{I_{2q+1}(a)=2^q q!\left(1-e^{-\frac{a^2}{2}}\sum_{k=0}^{q}\frac{a^{2k}}{2^k k!}\right)}$$

Pour $n=2q$, on obtient $I_{2q+2}(a)=(2q+1)I_{2q}(a)-g_{2q+1}(a)$, soit (en s'inspirant du résultat de la question 2) :

$$\frac{I_{2q+2}(a)}{\frac{(2q+2)!}{2^{q+1}(q+1)!}}=(2q+1)\frac{I_{2q}(a)}{\frac{(2q+2)!}{2^{q+1}(q+1)!}}-\frac{g_{2q+1}(a)}{\frac{(2q+2)!}{2^{q+1}(q+1)!}}$$

Ceci se récrit :

$$\frac{I_{2q+2}(a)}{\frac{(2q+2)!}{2^{q+1}(q+1)!}}-\frac{I_{2q}(a)}{\frac{(2q)!}{2^q q!}}=-\frac{2^q q!}{(2q+1)!}g_{2q+1}(a)\,.$$

Et par télescopage :

$$\frac{I_{2q}(a)}{\frac{(2q)!}{2^q q!}}-I_0(a)=\sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{I_{2k+2}(a)}{\frac{(2k+2)!}{2^{k+1}(k+1)!}}-\frac{I_{2k}(a)}{\frac{(2k)!}{2^k k!}}\right)=-\sum_{k=0}^{q-1}\frac{2^k k!}{(2k+1)!}g_{2k+1}(a)$$

$$=-\sum_{k=0}^{q-1}\frac{2^k k!}{(2k+1)!}a^{2k+1}e^{-\frac{a^2}{2}}=-e^{-\frac{a^2}{2}}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{2^k k!}{(2k+1)!}a^{2k+1}$$

Avec $I_0(a)=\int_0^a e^{-t^2/2}\,dt$, on obtient :

$$\boxed{I_{2q}(a)=\frac{(2q)!}{2^q q!}\left(\int_0^a e^{-t^2/2}\,dt-e^{-\frac{a^2}{2}}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{2^k k!}{(2k+1)!}a^{2k+1}\right)}$$

4) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\,x\mapsto\begin{cases}0 & \text{pour } x<0\\ \dfrac{1}{I_n}g_n(x) & \text{pour } x\geq 0\end{cases}$.

a. Comme g_n est continue sur $\mathbb{R}$ (vu question 1), f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme f_n est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_-^*$.

Enfin, $\lim\limits_{0^-} f_n=\lim\limits_{0^-}0=0$, $f_n(0)=0$ et comme $n>0$:

$$\lim_{0^+} f_n=\lim_{0^+}\frac{1}{I_n}g_n=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{I_n}x^n\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)=f_n(0)=0=\lim_{0^-}f_n.$$

Ainsi, f_n est continue en 0 et donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R}.}$$

b. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

- On vient de voir que f_n est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- f_n est nulle, donc positive ou nulle, sur $\mathbb{R}_-^*$ et comme g_n est positive ou nulle sur $\mathbb{R}_+$ et $I_n>0$, f_n est positive ou nulle sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, f_n est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $X\in\mathbb{R}_+$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^X f_n=\int_0^X\frac{1}{I_n}g_n=\frac{1}{I_n}\int_0^X g_n\xrightarrow[X\to+\infty]{}\frac{1}{I_n}\int_0^{+\infty}g_n=1$, donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f_n=1$.

Finalement :

$$\boxed{f_n \text{ est bien une densité de probabilité.}}$$

5) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}^*$.

Remarquons que pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $t^p g_n(t)=g_{n+p}(t)$, donc pour tout $X\in\mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_{-\infty}^X\left|t^p f_n(t)\right|dt=\int_{-\infty}^X t^p f_n(t)\,dt=\int_0^X t^p f_n(t)\,dt=\frac{1}{I_n}\int_0^X t^p g_n(t)\,dt=\frac{1}{I_n}\int_0^X g_{n+p}(t)\,dt.$$

Alors :

$$\int_{-\infty}^X\left|t^p f_n(t)\right|dt=\int_{-\infty}^X t^p f_n(t)\,dt\xrightarrow[X\to+\infty]{}\frac{1}{I_n}\int_0^{+\infty}g_{n+p}(t)\,dt=\frac{I_{n+p}}{I_n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{X_n \text{ admet un moment d'ordre } p\text{, qui vaut } \frac{I_{n+p}}{I_n}.}$$

Comme la variable X_n admet un moment d'ordre 1 et d'ordre 2 :

$$\boxed{X_n \text{ admet une espérance et une variance.}}$$

On a de plus :

$$E(X_n)=\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,dt=\frac{I_{n+1}}{I_n}=\begin{cases}\dfrac{I_{2q+1}}{I_{2q}}=\dfrac{2^q q!}{\dfrac{(2q)!}{2^q q!}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}}=\sqrt{2}\,\dfrac{2^n}{\dbinom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\sqrt{\pi}} & \text{quand } n=2q\\[2ex] \dfrac{I_{2q+2}}{I_{2q+1}}=\dfrac{\dfrac{(2q+2)!}{2^{q+1}(q+1)!}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}}{2^q q!}=\sqrt{2}\,\dfrac{\dbinom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\sqrt{\pi}}{2^n} & \text{quand } n=2q+1\end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{E(X_n)=\begin{cases}\sqrt{2}\,\dfrac{2^n}{\dbinom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\sqrt{\pi}} & \text{quand } n \text{ est pair}\\[2ex] \sqrt{2}\,\dfrac{\dbinom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\sqrt{\pi}}{2^n} & \text{quand } n \text{ est impair}\end{cases}}$$

Et :

$$E(X_n^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt=\frac{I_{n+2}}{I_n}=\left.\begin{cases}\dfrac{I_{2q+2}}{I_{2q}}=\dfrac{\dfrac{(2q+2)!}{2^{q+1}(q+1)!}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}}{\dfrac{(2q)!}{2^q q!}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}}=2q+1 & \text{quand } n=2q\\[2ex] \dfrac{I_{2q+3}}{I_{2q+1}}=\dfrac{2^{q+1}(q+1)!}{2^q q!}=2q+2 & \text{quand } n=2q+1\end{cases}\right\}=n+1.$$

Donc :

$$\boxed{V(X_n)=E(X_n^2)-E(X_n)^2=\begin{cases}n+1-2\dfrac{4^n}{\dbinom{n}{\lfloor n/2\rfloor}^2\pi} & \text{quand } n \text{ est pair}\\[2ex] n+1-2\dfrac{\dbinom{n}{\lfloor n/2\rfloor}^2\pi}{4^n} & \text{quand } n \text{ est impair}\end{cases}}$$

6) On a vu que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$, donc toute primitive de f_n est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Ceci est vrai pour $F_n : x\mapsto P\left(X_n\le x\right)=\int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt$.

Ainsi, pour tout $\left[a,b\right]\subset\mathbb{R}$:

$$\boxed{P\left(a\le X_n\le b\right)=F_n(b)-F_n(a)=\int_a^b f_n(t)\,dt}$$

7) Soit $a \in \mathbb{R}$.

- $P(X_n \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f_n(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{quand } a<0 \\ \dfrac{1}{I_n}\displaystyle\int_0^a g_n(t)\,dt & \text{quand } a \geq 0 \end{cases}$, soit :

$$\boxed{P(X_n \leq a) = \begin{cases} 0 & \text{quand } a<0 \\ \dfrac{I_n(a)}{I_n} & \text{quand } a \geq 0 \end{cases}}$$

- $P(X_n = a) = P(a \leq X_n \leq a) = \int_a^a f_n(t)\,dt$, soit :

$$\boxed{P(X_n = a) = 0}$$

- $P(X_n \geq a) = P(X_n > a) + P(X_n = a) = 1 - P(X_n \leq a)$, soit :

$$\boxed{P(X_n \geq a) = \begin{cases} 1 & \text{quand } a<0 \\ 1-\dfrac{I_n(a)}{I_n} & \text{quand } a \geq 0 \end{cases}}$$

8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Les variables X_1 et X_2 sont des variables à densité sur $\mathbb{R}$ et indépendantes, donc X_1 et $-X_2$ le sont aussi. Alors, en notant f_{X_1} et f_{-X_2} les densités respectives de X_n et $-X_2$, d'après les résultats donnés dans l'énoncé, $X_1 - X_2 = X_1 + (-X_2)$ est une variable à densité sur $\mathbb{R}$, de densité :

$$f_{X_1-X_2} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(x-t)\,dt.$$

On a $f_{X_1} = f_1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(-X_2 \leq x) = P(X_2 \geq -x) = 1 - P(X_2 < -x) = 1 - P(X_2 \leq -x) = 1 - \int_{-\infty}^{-x} f_2(t)\,dt.$$

Donc, comme f_{-X_2} est la dérivée de $x \mapsto P(-X_2 \leq x)$, on a $f_{-X_2} : x \mapsto f_2(-x)$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f_{X_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t<0 \\ \dfrac{1}{I_1} g_1(t) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

$$f_{-X_2}(x-t) = f_2(-(x-t)) = f_2(t-x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t<x \\ \dfrac{1}{I_2} g_2(t-x) & \text{pour } t \geq x \end{cases}$$

Ainsi :

$$f_{X_1-X_2}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)f_{-X_2}(x-t)\,dt=\int_{\max(0,x)}^{+\infty} f_{X_1}(t)f_{-X_2}(x-t)\,dt$$
$$=\frac{1}{I_1I_2}\int_{\max(0,x)}^{+\infty} g_1(t)g_2(t-x)\,dt$$

Alors :

$$P\left(X_1-X_2\leq 0\right)=\int_{-\infty}^{0} f_{X_1-X_2}(x)\,dx$$
$$=\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{1}{I_nI_2}\int_{0}^{+\infty} g_1(t)g_2(t-x)\,dt\right)dx$$
$$=\frac{1}{I_1I_2}\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{0}^{+\infty} g_1(t)g_2(t-x)\,dt\right)dx$$
$$=\frac{1}{I_1I_2}\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{0}^{+\infty} t(t-x)^2e^{-\frac{t^2+(t-x)^2}{2}}\,dt\right)dx$$

On a $\dfrac{t^2+(t-x)^2}{2}=t^2-xt+\dfrac{x^2}{2}=\left(t-\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{x^2}{4}$ et en posant le changement de variable $u=t-\dfrac{x}{2}$, on peut écrire :

$$\int_{0}^{+\infty} t(t-x)^2e^{-\frac{t^2+(t-x)^2}{2}}\,dt=\int_{0}^{+\infty} t(t-x)^2e^{-\left(t-\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4}}\,dt$$
$$=e^{-\frac{x^2}{4}}\int_{-x/2}^{+\infty}\left(u+\frac{x}{2}\right)\left(u-\frac{x}{2}\right)^2e^{-u^2}\,du=e^{-\frac{x^2}{4}}\int_{-x/2}^{+\infty}\left(u^3-\frac{x}{2}u^2-\frac{x^2}{4}u+\frac{x^3}{8}\right)e^{-u^2}\,du$$

Pour $k\in\mathbb{N}$, on prouve comme dans la question 1 que l'intégrale $\int_{-x/2}^{+\infty}u^3e^{-u^2}\,du$ converge, donc :

$$\int_{0}^{+\infty} t(t-x)^2e^{-\frac{t^2+(t-x)^2}{2}}\,dt$$
$$=e^{-\frac{x^2}{4}}\left[\int_{-x/2}^{+\infty}u^3e^{-u^2}\,du-\frac{x}{2}\int_{-x/2}^{+\infty}u^2e^{-u^2}\,du-\frac{x^2}{4}\int_{-x/2}^{+\infty}ue^{-u^2}\,du+\frac{x^3}{8}\int_{-x/2}^{+\infty}e^{-u^2}\,du\right]$$

De plus :

$$\int_{-x/2}^{+\infty}u^3e^{-u^2}\,du=\frac{1}{2}\int_{-x/2}^{+\infty}u^2e^{-u^2}(2u)\,du\underset{t=u^2}{=}\frac{1}{2}\int_{x^2/4}^{+\infty}te^{-t}\,dt\,.$$

Et comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-te^{-t}\right)=0$ par croissances comparées, on peut intégrer par parties :

$$\int_{-x/2}^{+\infty}u^3e^{-u^2}\,du=\frac{1}{2}\int_{x^2/4}^{+\infty}te^{-t}dt=\frac{1}{2}\left(\left[-te^{-t}\right]_{x^2/4}^{+\infty}+\int_{x^2/4}^{+\infty}e^{-t}dt\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+1\right)e^{-\frac{x^2}{4}}\,.$$

Par ailleurs, $\int_{-x/2}^{+\infty}u^2e^{-u^2}\,du=-\dfrac{1}{2}\int_{-x/2}^{+\infty}u\left(-2u\,e^{-u^2}\right)du$ et, par croissances comparées, on a $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(u\,e^{-u^2}\right)=0$, donc on peut intégrer par parties, ce qui donne :

$$\int_{-x/2}^{+\infty}u^2e^{-u^2}\,du=-\frac{1}{2}\left(\left[u\,e^{-u^2}\right]_{-x/2}^{+\infty}-\int_{-x/2}^{+\infty}e^{-u^2}\,du\right)=\frac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}+\frac{1}{2}\int_{-x/2}^{+\infty}e^{-u^2}\,du\,.$$

On a aussi :

$$\int_{-x/2}^{+\infty} u\, e^{-u^2} du = -\frac{1}{2}\int_{-x/2}^{+\infty}(-2u)\, e^{-u^2} du = -\frac{1}{2}\left[e^{-u^2}\right]_{-x/2}^{+\infty} = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} t(t-x)^2 e^{-\frac{t^2+(t-x)^2}{2}} dt \\
&= e^{-\frac{x^2}{4}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+1\right)e^{-\frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{8}e^{-\frac{x^2}{4}} - \frac{x}{4}\int_{-x/2}^{+\infty} e^{-u^2} du - \frac{x^2}{8}e^{-\frac{x^2}{4}} + \frac{x^3}{8}\int_{-x/2}^{+\infty} e^{-u^2} du\right] \\
&= \left(\frac{x^3}{8}-\frac{x}{4}\right)e^{-\frac{x^2}{4}}\int_{-x/2}^{+\infty} e^{-u^2} du - \left(\frac{x^2}{8}-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0\left(\int_0^{+\infty} t(t-x)^2 e^{-\frac{t^2+(t-x)^2}{2}} dt\right)dx &= \int_{-\infty}^0\left(\left(\frac{x^3}{8}-\frac{x}{4}\right)e^{-\frac{x^2}{4}}\int_{-x/2}^{+\infty} e^{-u^2} du - \left(\frac{x^2}{8}-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx \\
&\underset{t=-x}{=} \int_0^{+\infty}\left(\left(-\frac{t^3}{8}+\frac{t}{4}\right)e^{-\frac{t^2}{4}}\int_{t/2}^{+\infty} e^{-u^2} du - \left(\frac{t^2}{8}-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}\right)dt
\end{aligned}$$

Comme $\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^2}{8}-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{8}I_2 - \frac{1}{2}I_0$, on peut écrire

$$\int_{-\infty}^0\left(\int_0^{+\infty} t(t-x)^2 e^{-\frac{t^2+(t-x)^2}{2}} dt\right)dx = \int_0^{+\infty}\left(-\frac{t^3}{8}+\frac{t}{4}\right)e^{-\frac{t^2}{4}}\left(\int_{t/2}^{+\infty} e^{-u^2} du\right)dt - \frac{1}{8}I_2 + \frac{1}{2}I_0.$$

Posons enfin, pour $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(t) = \left(-\frac{t^3}{8}+\frac{t}{4}\right)e^{-\frac{t^2}{4}}$ et $\Psi(t) = \int_{+\infty}^t e^{-u^2} du$ Alors, sur $\mathbb{R}_+$:

- φ est continue, donc admet des primitives et, avec le changement de variable $v = u^2$ et une intégration par parties, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \varphi(u)\, du &= \int_0^t\left(-\frac{u^3}{8}+\frac{u}{4}\right)e^{-\frac{u^2}{4}} du = \int_0^t\left(-\frac{u^2}{4}+\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{u^2}{4}}\left(\frac{u}{2}\right)du = \int_0^{t^2/4}\left(-v+\frac{1}{2}\right)e^{-v} dv \\
&= \left[\left(v-\frac{1}{2}\right)e^{-v}\right]_0^{t^2/4} - \int_0^{t^2/4} e^{-v} dv = \left[\left(v-\frac{1}{2}\right)e^{-v}\right]_0^{t^2/4} + \left[e^{-v}\right]_0^{t^2/4} = \left(\frac{t^2}{4}+\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{t^2}{4}} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- Ψ est une primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$, qui est continue, donc Ψ est de classe C^1, de dérivée $\Psi' : t \mapsto e^{-t^2}$.

Pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_0^A\left(-\frac{t^3}{8}+\frac{t}{4}\right)e^{-\frac{t^2}{4}}\left(\int_{t/2}^{+\infty} e^{-u^2} du\right)dt = -\int_0^A \varphi(t)\Psi\left(\frac{t}{2}\right)dt.$$

Avec une intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^A\left(-\frac{t^3}{8}+\frac{t}{4}\right)e^{-\frac{t^2}{4}}\left(\int_{t/2}^{+\infty}e^{-u^2}du\right)dt=-\left[\left(\int_0^t\varphi(u)\,du\right)\Psi\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^A+\int_0^A\left(\int_0^t\varphi(u)\,du\right)\frac{1}{2}\Psi'\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

$$=-\left[\left(\left(\frac{t^2}{4}+\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{t^2}{4}}-\frac{1}{2}\right)\int_{+\infty}^{t/2}e^{-u^2}du\right]_0^A+\int_0^A\left(\left(\frac{t^2}{4}+\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{t^2}{4}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{4}}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^A\left(\left(\frac{t^2}{2}+1\right)e^{-\frac{t^2}{2}}-e^{-\frac{t^2}{4}}\right)dt-\left(\frac{A^2}{4}e^{-\frac{A^2}{4}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{A^2}{4}}-\frac{1}{2}\right)\int_{+\infty}^{A/2}e^{-u^2}du$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}I_2(A)+I_0(A)-2\int_0^{A/2}e^{-u}du\right)-\left(\frac{A^2}{4}e^{-\frac{A^2}{4}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{A^2}{4}}-\frac{1}{2}\right)\int_{+\infty}^{A/2}e^{-u^2}du$$

Or, $\left(\frac{A^2}{4}e^{-\frac{A^2}{4}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{A^2}{4}}-\frac{1}{2}\right)\int_{+\infty}^{A/2}e^{-u^2}du\xrightarrow[A\to+\infty]{}0$ et $2\int_0^{A/2}e^{-u}du\xrightarrow[A\to+\infty]{}2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,du=\sqrt{\pi}$,
on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\left(-\frac{t^3}{8}+\frac{t}{4}\right)e^{-\frac{t^2}{4}}\left(\int_{t/2}^{+\infty}e^{-u^2}du\right)dt=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}I_2+I_0-\sqrt{\pi}\right).$$

Finalement, avec $I_2=I_0=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $I_1=1$ (question 2), on obtient :

$$P\left(X_1\le X_2\right)=P\left(X_1-X_2\le 0\right)=\frac{1}{I_1I_2}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}I_2+I_0-\sqrt{\pi}\right)-\frac{1}{8}I_2+\frac{1}{2}I_0\right]=\frac{3-\sqrt{2}}{4}$$

Et, comme dans la question précédente, $P\left(X_1=X_2\right)=P\left(X_1-X_2=0\right)=0$ et :

$$P\left(X_1\ge X_2\right)=P\left(X_1>X_2\right)=1-P\left(X_1\le X_2\right).$$

Donc :

$$\boxed{\begin{array}{l}P\left(X_1\le X_2\right)=\dfrac{3-\sqrt{2}}{4}\\ P\left(X_1=X_2\right)=0\\ P\left(X_1\ge X_2\right)=\dfrac{1+\sqrt{2}}{4}\end{array}}$$