Corrigé du DM n° 5

1) Comme tous les coefficients de A sont positifs, la matrice A est stochastique si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

   Or, si on note $AU = (v_i)_{1\le i\le n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:
   $$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \times 1 = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\ .$$
   Ainsi, A est stochastique si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $v_i = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $AU = U$. Comme $U \neq 0$, ceci prouve que :

   $\boxed{A \text{ est stochastique si et seulement si } U \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre 1.}}$

2) On prend $X = (x_i)_{1\le i\le n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A associé à λ et $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \max\left(|x_1|, \dots, |x_n|\right)$.

   Remarquons que $|x_k| \ge 0$ et si $|x_k| = 0$, alors $|x_i| = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, et donc $X = 0$, ce qui est faux car X est un vecteur propre, donc $X \neq 0$. Ainsi, $|x_k| > 0$.

   On a $AX = \lambda X$, soit pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = \lambda x_i$.

   En particulier pour $i = k$, on obtient :
   $$\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j = \sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} a_{k,j} x_j + a_{k,k} x_k = \lambda x_k \quad \Leftrightarrow \quad \left(\lambda - a_{k,k}\right) x_k = \sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} a_{k,j} x_j\ .$$
   Alors, avec pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} \ge 0$ et l'inégalité triangulaire, on peut écrire :
   $$\left|\lambda - a_{k,k}\right| |x_k| = \left|\sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} a_{k,j} x_j\right| \le \sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} \left|a_{k,j} x_j\right| = \sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} a_{k,j} |x_j| \le \sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} a_{k,j} |x_k| = \left(\sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} a_{k,j}\right) |x_k|\ .$$
   Or, $|x_k| > 0$, donc :
   $$\left|\lambda - a_{k,k}\right| \le \sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} a_{k,j}\ .$$
   Enfin, $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} = 1$, donc $\sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} a_{k,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} - a_{k,k} = 1 - a_{k,k}$ et ainsi :
   $$\boxed{\left|\lambda - a_{k,k}\right| \le 1 - a_{k,k}}$$

   Toujours avec l'inégalité triangulaire, on a de plus :
   $$|\lambda| - a_{k,k} = |\lambda| - |a_{k,k}| \le \big||\lambda| - |a_{k,k}|\big| \le \left|\lambda - a_{k,k}\right|\ .$$

Donc, $|\lambda| - a_{k,k} \leq |\lambda - a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k}$, ce qui donne :

$$\boxed{|\lambda| \leq 1}$$

3) On pose ici $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. En reprenant l'inégalité $|a_{k,k} - \lambda| \leq 1 - a_{k,k}$, on obtient :

$$\begin{aligned} |a_{k,k} - e^{i\theta}| \leq 1 - a_{k,k} \quad & \Leftrightarrow \quad |a_{k,k} - e^{i\theta}|^2 \leq (1 - a_{k,k})^2 \\ & \Leftrightarrow \quad (a_{k,k} - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta \leq (1 - a_{k,k})^2 \\ & \Leftrightarrow \quad a_{k,k}^2 - 2a_{k,k}\cos\theta + 1 \leq a_{k,k}^2 - 2a_{k,k} + 1 \\ & \Leftrightarrow \quad a_{k,k}\cos\theta \geq a_{k,k} \end{aligned}$$

Comme tous les coefficients sont strictement positifs, on a $a_{k,k} > 0$.

On obtient alors $\cos\theta \geq 1$, soit :

$$\boxed{\cos\theta = 1}$$

Si $\cos\theta = 1$, alors $\theta = 0\ [2\pi]$, donc $e^{i\theta} = 1$, soit :

$$\boxed{\lambda = 1}$$

4) On a :

$$\chi_{A^\top} = \det\left(X I_n - A^\top\right) = \det\left((X I_n - A)^\top\right) = \det\left(X I_n - A\right) = \chi_A .$$

Comme les matrices A et $A^\top$ ont même polynôme caractéristique, elles ont le même spectre. Ainsi, comme 1 est valeur propre de A :

$$\boxed{\text{1 est une valeur propre de } A^\top.}$$

D'après le théorème du rang, on a :

$$\begin{aligned} n &= rg\,(A - I_n) + \dim\ker\left(A - I_n\right) = rg\,(A - I_n) + \dim E_1(A) \\ &= rg\,(A^\top - I_n) + \dim\ker\left(A^\top - I_n\right) = rg\,(A^\top - I_n) + \dim E_1(A^\top) \end{aligned}$$

Or, $rg\,(A^\top - I_n) = rg\left((A - I_n)^\top\right) = rg\,(A - I_n)$, donc :

$$\dim E_1(A^\top) = n - rg\,(A^\top - I_n) = n - rg\,(A - I_n) = \dim E_1(A) .$$

Ainsi :

$$\boxed{E_1(A) \text{ et } E_1(A^\top) \text{ ont la même dimension.}}$$

5) a. On procède comme dans la question 2.

On a $A^{\mathsf{T}}V = V$, donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} v_j = v_i$, d'où $|v_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} v_j\right| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{j,i} v_j|$, soit :

$$\boxed{|v_i| \le \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |v_j|}$$

Supposons qu'il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|v_{i_0}| < \sum_{j=1}^{n} a_{j,i_0} |v_j|$. On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i| < \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |v_j| \right).$$

Or, A est stochastique, donc pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} a_{j,i} = 1$ et :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |v_j| \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |v_j| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} |v_j| = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{j,i} \right) |v_j| = \sum_{j=1}^{n} |v_j| .$$

Ainsi, on aurait $\sum_{i=1}^{n} |v_i| < \sum_{j=1}^{n} |v_j|$ qui est absurde, donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\boxed{|v_i| = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |v_j|}$$

b. On a $A^{\mathsf{T}} |V| = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |v_j| \right)_{1 \le i \le n}$, donc d'après le résultat ci-dessus, on a immédiatement :

$$\boxed{A^{\mathsf{T}} |V| = |V|}$$

On a $|v_i| \ge 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Supposons qu'il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|v_{i_0}| = 0$.

On a alors $\sum_{j=1}^{n} a_{j,i_0} |v_j| = 0$. Or, les $a_{j,i_0} |v_j|$ sont positifs, donc pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $a_{j,i_0} |v_j| = 0$ et comme $a_{j,i_0} > 0$, on obtient $|v_j| = 0$. Ceci veut dire que $V = 0$ ce qui est absurde car V est un vecteur propre de A^{T}, donc non nul.

Ainsi, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|v_i| \ne 0$ et donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![1,n]\!],\ |v_i| > 0 .}$$

c. Soient $X = (x_i)_{1 \le i \le n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = (y_i)_{1 \le i \le n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ deux vecteurs de $E_1(A^{\mathsf{T}})$.

Comme $E_1(A^{\mathsf{T}})$ est un espace vectoriel, $y_1 X - x_1 Y \in E_1(A^{\mathsf{T}})$.

D'après ce qui précède, si $y_1 X - x_1 Y$ est non nul, alors ses coefficients tous non nuls. Or, la première coordonnée de $y_1 X - x_1 Y$ est $y_1 x_1 - x_1 y_1 = 0$, donc au moins un coefficient de $y_1 X - x_1 Y$ est nul et donc $y_1 X - x_1 Y$ est nul.

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{y_1X - x_1Y = 0}$$

Comme 1 est valeur propre de $A^\top$, il existe un vecteur X non nul de $E_1(A^\top)$. Comme $X \neq 0$, on a $x_1 \neq 0$ et pour tout vecteur $Y \in E_1(A^\top)$, on a $y_1X - x_1Y = 0$, donc $Y = \dfrac{y_1}{x_1}X$. Ainsi, tout vecteur de $E_1(A^\top)$ est colinéaire à X, donc $E_1(A^\top) = \mathrm{Vect}(X)$ et :

$$\boxed{\dim\left(E_1(A^\top)\right) = 1}$$

d. Dans la question 5)b, on a établi l'existence d'un vecteur $|V| \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coordonnées $|v_1|, \dots, |v_n|$ sont toutes strictement positives et tel que $A^\top|V| = |V|$, soit $|V| \in E_1(A^\top)$.

En notant $s = |v_1| + \dots + |v_n| > 0$, $W = \dfrac{1}{s}|V|$ et $w_1, \dots, w_n$ les coordonnées de W, on a :

- $W \in E_1(A^\top)$ (car $E_1(A^\top)$ est un espace vectoriel) ;
- pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $w_i = \dfrac{1}{s}|v_i| > 0$;
- $w_1 + \dots + w_n = \dfrac{1}{s}|v_1| + \dots + \dfrac{1}{s}|v_n| = \dfrac{1}{s}\left(|v_1| + \dots + |v_n|\right) = 1$.

Ainsi, il existe bien un vecteur W, directeur de $E_1(A^\top)$, dont les coordonnées $w_1, \dots, w_n$ sont strictement positives et vérifient $w_1 + \dots + w_n = 1$.

Supposons qu'il existe un autre vecteur W', de coordonnées $w_1', \dots, w_n'$ et vérifiant les mêmes propriétés que W. Comme W et W' sont tous deux directeurs de la droite $E_1(A^\top)$, ils sont colinéaires (et tous deux non nuls), donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $W' = \alpha W$.

Ceci donne pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $w_i' = \alpha w_i$ et donc :

$$1 = w_1' + \dots + w_n' = \alpha w_1 + \dots + \alpha w_n = \alpha\left(w_1 + \dots + w_n\right) = \alpha.$$

Ainsi, $\alpha = 1$, donc $W' = W$ et finalement :

> La droite $E_1(A^\top)$ admet un unique vecteur directeur W dont les coordonnées $w_1, \dots, w_n$ sont strictement positives et vérifient $w_1 + \dots + w_n = 1$.

6) a. Soient $i \in [\![1, p]\!]$ et $\ell \in \mathbb{N}$. Pour $k \geq \ell$, on a :

$$\binom{k}{\ell}\lambda_i^{k-\ell} = \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}\lambda_i^{k-\ell} = \frac{k \times (k-1) \times \dots \times (k-\ell+1)}{\ell!}\lambda_i^{k-\ell}.$$

Donc, $\displaystyle\binom{k}{\ell}\lambda_i^{k-\ell} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{k^\ell \lambda_i^{k-\ell}}{\ell!}$ et par croissances comparées (avec $|\lambda_i| < 1$), $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \frac{k^\ell \lambda_i^{k-\ell}}{\ell!} = 0$, donc :

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} \binom{k}{\ell}\lambda_i^{k-\ell} = 0}$$

La matrice N_i est nilpotente, donc il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $N_i^r = 0_{n_i}$.

Comme I_{n_i} et N_i commutent, on peut utiliser la formule du binôme pour écrire pour tout entier $k > r$:

$$\left(\lambda_i I_{n_i} + N_i\right)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \lambda_i^{k-\ell} N_i^{\ell}.$$

Or, pour tout $\ell \geq r$, on a $N_i^{\ell} = 0_{n_i}$, donc :

$$\left(\lambda_i I_{n_i} + N_i\right)^k = \sum_{\ell=0}^{r} \binom{k}{\ell} \lambda_i^{k-\ell} N_i^{\ell}.$$

Et pour tout $\ell \in [\![0, r]\!]$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \binom{k}{\ell} \lambda_i^{k-\ell} N_i^{\ell} = 0_{n_i}$, donc comme somme de $r+1$ termes de limite nulle, on a bien :

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} \left(\lambda_i I_{n_i} + N_i\right)^k = 0}$$

b. D'après le résultat admis dans l'énoncé, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ avec $B = diag\left(I_1, \lambda_1 I_{n_1} + N_1, \ldots, \lambda_p I_{n_p} + N_p\right)$. On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^k P^{-1}$ avec :

$$B^k = diag\left(I_1, \left(\lambda_1 I_{n_1} + N_1\right)^k, \ldots, \left(\lambda_p I_{n_p} + N_p\right)^k\right).$$

D'après ce qui précède, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(\lambda_i I_{n_i} + N_i\right)^k = 0$, donc :

$$\lim_{k \to +\infty} B^k = \lim_{k \to +\infty} diag\left(I_1, \left(\lambda_1 I_{n_1} + N_1\right)^k, \ldots, \left(\lambda_p I_{n_p} + N_p\right)^k\right) = diag\left(I_1, 0_{n_1}, \ldots, 0_{n_p}\right)$$

Enfin, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire (par bilinéarité du produit matriciel), donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie. On a peut alors conclure que :

$$\lim_{k \to +\infty} A^k = \lim_{k \to +\infty} PB^k P^{-1} = P\left(diag\left(I_1, 0_{n_1}, \ldots, 0_{n_p}\right)\right)P^{-1}.$$

Et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } \left(A^k\right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

7) Soit $\left(X_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs stochastiques de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ qui converge vers un vecteur $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $x_{k,1}, \ldots, x_{k,n}$ les coordonnées de X_k.

On a alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{k,i} = x_i$ et :

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k,i} \geq 0$, donc $x_i \geq 0$;
- $x_{k,1} + \ldots + x_{k,n} = 1$, donc $x_1 + \ldots + x_n = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(x_{k,1} + \ldots + x_{k,n}\right) = 1$.

Ainsi, X est un vecteur stochastique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Par caractérisation séquentielle, ceci prouve que :

$$\boxed{\text{L'ensemble des vecteurs stochastiques de } \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \text{ est fermé dans } \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}).}$$

8) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons à nouveau $x_{k,1}, \dots, x_{k,n}$ les coordonnées de X_k.

a. Prouvons par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k = X_0 A^k$ et X_k est un vecteur stochastique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Initialisation : Pour $k = 0$, comme $A^0 = I_n$, on a $X_0 = X_0 A^0 = X$, qui est un vecteur stochastique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ par hypothèse. Donc la propriété est vraie au rang $k = 0$.

Hérédité : Supposons la propriété est vraie à un rang $k \in \mathbb{N}$ donné.

Avec $X_{k+1} = X_k A$, on a alors par hypothèse de récurrence, $X_k = X_0 A^k$, donc :

$$X_{k+1} = X_k A = X_0 A^k A = X_0 A^{k+1}.$$

Et :

- pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_{k+1,i} = \sum_{j=1}^{n} x_{k,j} a_{j,i} \geq 0$, car pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $x_{k,j} \geq 0$ par hypothèse de récurrence et $a_{i,j} > 0$;
- par hypothèse de récurrence, on a $\sum_{j=1}^{n} x_{k,j} = 1$, d'où :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{k+1,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{k,j} a_{j,i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{k,j} a_{j,i} = \sum_{j=1}^{n}\left(x_{k,j} \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} \right) = \sum_{j=1}^{n}\left(x_{k,j} \times 1\right) = \sum_{j=1}^{n} x_{k,j} = 1.$$

Ainsi, X_{k+1} est un vecteur stochastique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Enfin, l'application $M \mapsto X_0 M$ est linéaire (par linéarité à droite du produit matriciel), donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie. Or, on a vu dans la question 6 que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Si on note $\tilde{A}$ sa limite, on a alors :

$$\lim_{k \to +\infty} X_k = \lim_{k \to +\infty} X_0 A^k = X_0 \tilde{A} = X_\infty.$$

Comme l'ensemble des vecteurs stochastiques de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $\left(X_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs stochastiques de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, alors la limite X_∞ est encore un vecteur stochastique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } \left(X_k\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un vecteur stochastique } X_\infty \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}).}$$

b. On a l'application $X \mapsto XA$ est linéaire (par linéarité à gauche du produit matriciel), donc continue sur $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie. Ainsi :

$$\lim_{k \to +\infty}\left(X_k A\right) = \left(\lim_{k \to +\infty} X_k\right) A = X_\infty A.$$

Or, $\lim\limits_{k\to+\infty}(X_k A)=\lim\limits_{k\to+\infty}X_{k+1}=X_\infty$, donc $X_\infty A=X_\infty$ et en transposant, ceci donne :

$$A^\top X_\infty^\top=X_\infty^\top.$$

Ainsi, $X_\infty^\top\in E_1(A^\top)$. Comme X_∞ est un vecteur stochastique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, ses coordonnées sont positives et de somme égale à 1. Ceci prouve entre autres que $X_\infty\neq 0$, donc que $X_\infty^\top\neq 0$ et alors, d'après la question 5, $X_\infty^\top$ a ses coefficients tous non nuls.

Finalement, $X_\infty^\top$ est un vecteur de $E_1(A^\top)$ dont les coordonnées sont strictement positives et de somme égale à 1. On vu dans la question 5)d que le seul vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant tout cela est *W*. Ainsi, $X_\infty^\top=W$ et donc :

$$\boxed{X_\infty=W^\top}$$

9) a. Les coefficients de *B* sont des probabilités, donc sont tous positifs.

Or, $Z_{k+1}(\Omega)=\{z_1,\dots,z_n\}$, donc la famille $\big(P(Z_k=z_1),\dots,P(Z_k=z_n)\big)$ est un système complet d'évènements et pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $P_{(Z_k=z_i)}$ est une loi de probabilité, donc :

$$\sum_{j=1}^n p_{i,j}=\sum_{j=1}^n P_{(Z_k=z_i)}\big(Z_{k+1}=z_j\big)=1.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La matrice } B=(p_{i,j})_{1\le i,j\le n} \text{ est stochastique.}}$$

b. Soit $k\in\mathbb{N}$. Comme $Z_k(\Omega)=\{z_1,\dots,z_n\}$, la famille $\big(P(Z_k=z_1),\dots,P(Z_k=z_n)\big)$ est un système complet d'évènements. Alors, d'après la formule des probabilités totales, on peut écrire pour tout $j\in[\![1,n]\!]$:

$$P\big(Z_{k+1}=z_j\big)=P_{(Z_k=z_1)}\big(Z_{k+1}=z_j\big)P\big(Z_k=z_1\big)+\dots+P_{(Z_k=z_n)}\big(Z_{k+1}=z_j\big)P\big(Z_k=z_n\big).$$

Avec $P_{(Z_k=z_i)}\big(Z_{k+1}=z_j\big)=p_{i,j}$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on obtient :

$$P\big(Z_{k+1}=z_j\big)=p_{1,j}P\big(Z_k=z_1\big)+\dots+p_{n,j}P\big(Z_k=z_n\big).$$

Soit :

$$Y_{k+1}=\begin{pmatrix}P(Z_{k+1}=z_1)\\ \vdots\\ P(Z_{k+1}=z_i)\\ \vdots\\ P(Z_{k+1}=z_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{1,1}P(Z_k=z_1)+\dots+p_{n,1}P(Z_k=z_n)\\ \vdots\\ p_{1,i}P(Z_k=z_1)+\dots+p_{n,i}P(Z_k=z_n)\\ \vdots\\ p_{1,n}P(Z_k=z_1)+\dots+p_{n,n}P(Z_k=z_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{1,1}&\cdots&p_{i,1}&\cdots&p_{n,1}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ p_{1,i}&\cdots&p_{i,i}&\cdots&p_{n,i}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ p_{1,n}&\cdots&p_{i,n}&\cdots&p_{n,n}\end{pmatrix}Y_k.$$

Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{Y_{k+1}=B^\top Y_k}$$

c. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $Y_{k+1} = B^{\top} Y_k$, donc $Y_{k+1}^{\top} = Y_k^{\top} B$ et si $p_{i,j} > 0$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, alors la matrice B vérifie les mêmes hypothèses que la matrice A dans la question 8, donc la suite $\left(Y_k^{\top}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur stochastique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, noté L, indépendant de $Y_0^{\top}$.

Comme la transposition est linéaire, elle est continue sur $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie et donc $\left(Y_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $L^{\top}$, que l'on rappelle Y_∞ et qui est indépendant de $Y_0^{\top}$, donc de Y_0. Comme Y_0 est défini par la loi de Z_0, Y_∞ est indépendant de la loi de Z_0 et ainsi :

Quelle que soit la loi de Z_0, la suite $\left(Y_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $Y_\infty \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ fixé tel que $Y_\infty^{\top}$ est un vecteur stochastique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.