DS de Mathématiques n° 3

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 7 pages.

***Problème 1 :** Extrait de CentraleSupélec 2024 - PC - Mathématiques 2*

Dans ce problème, on introduit la notion de produit infini et on l'utilise pour obtenir diverses propriétés.

- La partie I permet d'obtenir des résultats qui seront utilisés dans tout le problème.
- La partie II étudie quelques exemples de calcul de produit infini, dont celui de Wallis.
- La partie III permet de montrer, sous certaines conditions, la continuité ou le caractère C^1 d'une fonction définie par un produit infini de fonctions.
- La partie IV a pour but d'exprimer la fonction sinus sous forme de produit infini et, en s'appuyant sur la partie III, d'en tirer quelques conséquences.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de *t*.

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$:

$$P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k .$$

On dit que la suite $(P_n)_{n \geq p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\prod\limits_{n \geq p} u_n$.

Si la suite $(P_n)_{n \geq p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} P_n .$$

I Résultats préliminaires

I.A – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q1. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\left| \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|) \right) - 1 .$$

☺ *On pourra procéder par récurrence.*

Q2. Montrer que, pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in[-1\,;+\infty[^n$:

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\le\exp\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right).$$

I.B – Soit $z\in\mathbb{C}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

Le but de cette sous-partie est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e^z.

Q3. Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{C}$:

$$\left|(1+t)-e^t\right|\le|t|^2\,e^{|t|}.$$

Q4. Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On note $M=\max\left(|a|,|b|\right)$. Montrer que :

$$\left|a^n-b^n\right|\le nM^{\,n-1}\,|a-b|.$$

Q5. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n-e^z\right|\le\frac{|z|^2\,e^{|z|}}{n}.$$

Q6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e^z.

II Exemples de calcul de produit infini

II.A –

Q7. Calculer $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

☺ *On pourra, pour tout* $N\ge2$, *établir une expression de* $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

II.B – Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$W_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n u\,du.$$

Q8. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2}=(n+1)W_n$ et en déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$W_{2n+1}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Q9. Déterminer un équivalent de W_{2n+1} et en déduire $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right)$.

III Étude d'une fonction définie par un produit infini

On considère dans cette partie :

- a et b deux réels tels que $a < b$ et le segment $S = [a,b]$.
- $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions définies sur S à valeurs dans $]-1,+\infty[$.
- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in S$, $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+f_k(x))$ et $Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+|f_k(x)|)$.
- Sous condition d'existence, on pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}|f_k(x)|$.

III.A – On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions continues sur S et que la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge uniformément sur S vers la fonction R_0.

Q10. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in S$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leq e^M |f_{n+1}(x)|.$$

Q11. Montrer que, pour tout $x \in S$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq Q_{n+1}(x) - Q_n(x).$$

Q12. En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur S vers la fonction P définie sur S par :

$$P : \begin{cases} S \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty}(1+f_n(x)) \end{cases}$$

Q13. Montrer que la fonction P est continue et ne s'annule pas sur S.

III.B – Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-e^{-nx^2}\right)$.

Q14. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q15. Dresser le tableau de variations complet de f sur $x \in \mathbb{R}_+^*$ (limites incluses).

III.C – On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions de classe C^1 sur S telle que :

- la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge uniformément sur S ;
- la série de fonctions $\sum \dfrac{f_n'}{1+f_n}$ converge uniformément sur S.

Q16. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in S$:

$$P_n'(x) = P_n(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k'(x)}{1+f_k(x)}.$$

Q17. En déduire que la fonction $P : x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + f_n(x)\right)$ est de classe C^1 sur S et que pour tout $x \in S$:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x)}.$$

☺ *On montrera que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de fonctions continues qui convergent uniformément sur S vers u et v respectivement, alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent uniformément vers uv sur S.*

IV Expression de la fonction sinus comme produit infini

IV.A – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left(\left(1 + \frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1}\right).$$

Dans les questions **Q18** à **Q21**, on fixe un entier naturel *n*.

Q18. Montrer que P_n est un polynôme réel de degré $2n+1$.

Q19. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $x_k = (2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Montrer que l'ensemble des racines de P_n est $\left\{x_k \mid k \in [\![0, 2n]\!]\right\}$.

Q20. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$P_n(X) = \lambda\, X \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{X^2}{x_k^2}\right).$$

Q21. En calculant $P_n'(0)$ de deux façons, montrer que :

$$P_n(X) = X \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{X^2}{x_k^2}\right).$$

Q22. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction sinus.

IV.B – Dans cette sous-partie, on fixe un réel *x* et on considère la suite de fonctions $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, v_k est définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$v_k : t \mapsto \begin{cases} x \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{x^2}{\left(2\lfloor t \rfloor + 1\right)^2 \tan^2\left(\dfrac{j\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1}\right)}\right) & \text{quand } t \geq k \\ P_{\lfloor t \rfloor}(x) & \text{quand } t < k \end{cases}$$

Q23. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$:

$$\left|v_k(t) - v_{k-1}(t)\right| \leq \frac{x^2}{k^2\pi^2}\left|v_{k-1}(t)\right|.$$

Q24. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|v_k(t)\right| \leq |x| \exp\left(\frac{x^2}{\pi^2}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j^2}\right).$$

Q25. En déduire que la série de fonctions $\sum\left(v_k - v_{k-1}\right)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Q26. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{t \to +\infty} v_k(t)$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{k \to +\infty} v_k(t)$.

Q27. En déduire que :

$$\sin x = x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).$$

IV.C –

Q28. Montrer que, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$:

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{(n\pi)^2 - x^2}.$$

Q29. En déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

☺ *On pourra dans un premier temps déterminer* $\lim\limits_{x \to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^2 \sin x}$.

Problème 2 : *Extrait de CCP 2019 - PSI*

Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

I Éléments propres d'une matrice

I.1 – Localisation des valeurs propres

On considère une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé ($X \neq 0$).

Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\left|x_{i_0}\right| = \max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|$.

Q30. Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\lambda x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$.

Q31. En déduire que $|\lambda| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$, puis que :

$$|\lambda| \le \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right).$$

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_n(\alpha,\beta)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_n(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

On admet que toutes les valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$ sont réelles.

Q32. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha,\beta)$. Montrer que $|\lambda|\le|\alpha|+2|\beta|$.

I.2 – Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$

Q33. En utilisant la question précédente, montrer que pour toute valeur propre $\lambda\in\mathbb{R}$ de $A_n(0,1)$, il existe $\theta\in[0,\pi]$ tel que $\lambda=2\cos\theta$.

On note $\chi_{A_n(0,1)}$ le polynôme caractéristique de $A_n(0,1)$ et on pose $U_n(X)=\chi_{A_n(0,1)}(2X)$.

Q34. Établir une relation entre U_{n+2}, U_{n+1} et U_n, puis montrer que pour tout $\theta\in\,]0,\pi[$:

$$U_n(\cos\theta)=\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.$$

Q35. En déduire que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0,1)$ est $\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right),\ j\in[\![1,n]\!]\right\}$.

Déterminer la multiplicité de chaque valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.

Pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, on pose $\theta_j=\frac{j\pi}{n+1}$.

Q36. Soit $X=(x_i)_{1\le i\le n}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos\theta_j$.

On pose $x_0=x_{n+1}=0$. Montrer que pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$:

$$x_{k+2}-2(\cos\theta_j)x_{k+1}+x_k=0.$$

En déduire l'espace propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos\theta_j$.

Q37. En déduire les éléments propres de $A_n(\alpha,\beta)$ pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

On distinguera les deux cas $\beta=0$ et $\beta\neq0$.

II Matrices par blocs

On considère A, B, C et D des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que C et D commutent.

Q38. Calculer $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} D & 0_n \\ \hline -C & I_n \end{array}\right)$.

L'objectif des trois prochaines questions est de démontrer la relation :

$$\det\left(\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\right) = \det\left(AD - BC\right) \quad \textbf{(1)}.$$

Q39. Montrer l'égalité **(1)** dans le cas où D est inversible.

Q40. On ne suppose plus D inversible. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $k \geq N$, la matrice $D + \frac{1}{k} I_n$ soit inversible.

Q41. En déduire que l'égalité **(1)** reste vraie dans le cas où D n'est pas inversible.

Considérons une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et formons la matrice :

$$N = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & I_n \\ \hline M & 0_n \end{array}\right).$$

Q42. Montrer que $Sp(N) = \left\{\mu \in \mathbb{C}, \mu^2 \in Sp(M)\right\}$.

Q43. Soient $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ^2.

Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} X \\ \mu X \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre μ.

- FIN DU SUJET -