DM de Mathématiques n° 5

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une valeur propre λ, on note $E_\lambda(M) = \ker\left(M - \lambda I_n\right)$ le sous-espace propre de M associé à λ.

Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si :

- pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} \ge 0$;
- pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

Un vecteur *ligne* $X = (x_i)_{1 \le i \le n}$ de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est dit *stochastique* si :

- $x_i \ge 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$;
- $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

On appelle U le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coordonnées valent toutes 1.

1) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs. Montrer que de A est stochastique si et seulement si U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

Dans la suite, on considère une matrice stochastique $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Dans cette question et la suivante, on considère λ une valeur propre *complexe* de la matrice A.

   On considère $X = (x_i)_{1 \le i \le n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A associé à λ et on pose note k un entier entre 1 et n tel que $|x_k| = \max\left(|x_1|, \dots, |x_n|\right)$.

   Prouver que $|a_{k,k} - \lambda| \le 1 - a_{k,k}$ et en déduire que $|\lambda| \le 1$.

On suppose désormais que tous les coefficients de A sont *strictement* positifs.

3) On suppose toujours que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, et de plus que λ est de module 1. On note θ un argument de λ. Montrer que $\cos\theta = 1$ et en déduire λ.

4) Prouver que 1 est une valeur propre de la matrice A^{T} et que les espaces propres $E_1(A)$ et $E_1(A^{\mathsf{T}})$ ont la même dimension (on pourra utiliser le théorème du rang).

5) Dans cette question, on étudie l'espace propre $E_1(A^{\mathsf{T}})$.

   Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de la matrice A^{T} relatif à la valeur propre 1. On note $v_1, \dots, v_n$ ses coefficients. On note $|V|$ le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de coefficients $|v_1|, \dots, |v_n|$.

   a. Prouver que $|v_i| \le \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |v_j|$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. A l'aide de la somme $\sum_{i=1}^{n} |v_i|$ prouver que ces inégalités sont en fait des égalités.

   b. Prouver l'égalité $A^{\mathsf{T}} |V| = |V|$ et que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|v_i| > 0$.

On a donc prouvé que tout vecteur non nul de $E_1(A^{\mathsf{T}})$ a ses coefficients tous non nuls.

c. Soient $X=(x_i)_{1\le i\le n}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y=(y_i)_{1\le i\le n}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ deux vecteurs de $E_1(A^\top)$.

Montrer que $y_1X-x_1Y=0$. En déduire la dimension de $E_1(A^\top)$.

d. Prouver que $E_1(A^\top)$ admet un unique vecteur directeur W dont les coordonnées $w_1,\dots,w_n$ sont strictement positives et vérifient $w_1+\dots+w_n=1$.

6) L'objet de cette question est de démontrer que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ des puissances de A converge.

Pour cela, on admet que la matrice A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme $diag\left(I_1,\lambda_1 I_{n_1}+N_1,\dots,\lambda_p I_{n_p}+N_p\right)$ où les matrices $N_1,\dots,N_p$ sont nilpotentes et où $|\lambda_i|<1$ pour tout $i\in[\![1,p]\!]$.

a. Prouver que pour tout $i\in[\![1,p]\!]$ et tout $\ell\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\binom{k}{\ell}\lambda_i^{k-\ell}=0$. En déduire que :

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\lambda_i I_{n_i}+N_i\right)^k=0.$$

b. Montrer alors que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

7) Prouver que l'ensemble des vecteurs stochastiques de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

8) Soit $X=(x_i)_{1\le i\le n}$ un vecteur stochastique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. On pose $X_0=X$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$X_{k+1}=X_kA.$$

a. Prouver que la suite $\left(X_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs stochastiques de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et qu'elle converge vers un vecteur stochastique $X_\infty\in\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $X_\infty=W^\top$.

9) Soit $\left(Z_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires d'un espace probabilisé (Ω,P), toutes à valeurs dans le même ensemble fini $Z_k(\Omega)=\{z_1,\dots,z_n\}$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, on pose $P_{(Z_k=z_i)}\left(Z_{k+1}=z_j\right)=p_{i,j}$ et on note $B=(p_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Enfin, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on pose $Y_k=\begin{pmatrix}P\left(Z_k=z_1\right)\\ \vdots\\ P\left(Z_k=z_n\right)\end{pmatrix}$.

a. Prouver que B est stochastique.

b. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $Y_{k+1}=B^\top Y_k$.

c. En supposant que pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, $p_{i,j}>0$, montrer que, quelle que soit la loi de Z_0, la suite $\left(Y_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $Y_\infty\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ fixé tel que $Y_\infty^\top$ est un vecteur stochastique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.