Corrigé du DS n° 3

***Problème 1 :** Extrait de CentraleSupélec 2024 - PC - Mathématiques 2*

I Résultats préliminaires

I.A –

Q1. Procédons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.

Initialisation : Soit $x_1\in\mathbb{R}$. On a :

$$\left|\left(\prod_{k=1}^{1}(1+x_k)\right)-1\right| = |1+x_1-1| = |x_1| = 1+|x_1|-1 = \left(\prod_{k=1}^{1}(1+|x_k|)\right)-1.$$

L'inégalité est donc vraie au rang $n=1$ (c'est même une égalité).

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $n\in\mathbb{N}^*$.

Soit $(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\left(\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k)\right)-1\right| &= \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)(1+x_{n+1})-1\right| \\
&= \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)(1+x_{n+1})-(1+x_{n+1})+(1+x_{n+1})-1\right| \\
&= \left|\left[\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)-1\right](1+x_{n+1})+x_{n+1}\right| \\
&\le \left|\left[\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)-1\right](1+x_{n+1})\right|+|x_{n+1}| \\
&\le \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)-1\right||1+x_{n+1}|+|x_{n+1}|
\end{aligned}$$

Avec l'hypothèse de récurrence et l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\left(\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k)\right)-1\right| &\le \left[\left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right)-1\right](1+|x_{n+1}|)+|x_{n+1}| \\
&\le \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right)(1+|x_{n+1}|)-1-|x_{n+1}|+|x_{n+1}| = \left(\prod_{k=1}^{n+1}(1+|x_k|)\right)-1
\end{aligned}$$

L'inégalité est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit :

$$\boxed{\text{Pour tout } (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)-1\right| \le \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right)-1.}$$

Q2. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in [-1\,;+\infty[^n$.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $x_k \in [-1\,;+\infty[$, donc $1+x_k \geq 0$ et par convexité de la fonction exponentielle, on peut écrire $0 \leq 1+x_k \leq \exp(x_k)$. En multipliant membre à membre pour k allant de 1 à n, on obtient :

$$0 \leq \prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leq \prod_{k=1}^{n}\exp(x_k).$$

Soit :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}$$

I.B –

Q3. Pour tout $t \in \mathbb{C}$, les séries $\sum \frac{t^k}{k\,!}$ et $\sum \frac{|t|^k}{k\,!}$ convergent et

$$\left|(1+t)-e^t\right| = \left|(1+t)-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^k}{k\,!}\right| = \left|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{t^k}{k\,!}\right| \leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|t|^k}{k\,!}.$$

Or, avec une réindexation et $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|t|^k}{k\,!} = e^{|t|}$, on peut écrire :

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|t|^k}{k\,!} = |t|^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|t|^{k-2}}{k\,!} = |t|^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|t|^k}{(k+2)!} = |t|^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+2)(k+1)}\frac{|t|^k}{k\,!} \leq |t|^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|t|^k}{k\,!} = |t|^2 e^{|t|}.$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\left|(1+t)-e^t\right| \leq |t|^2 e^{|t|}}$$

Q4. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left|a^n-b^n\right| = \left|(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-1-k}\right| = |a-b|\left|\sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-1-k}\right| \leq |a-b|\left(\sum_{k=0}^{n-1}|a|^k\,|b|^{n-1-k}\right).$$

Et, avec $M = \max(|a|,|b|)$, on a $|a| \leq M$ et $|b| \leq M$, d'où :

$$\sum_{k=0}^{n-1}|a|^k\,|b|^{n-1-k} \leq \sum_{k=0}^{n-1}M^k M^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}M^{n-1} = nM^{n-1}.$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\left|a^n-b^n\right| \leq nM^{n-1}|a-b|}$$

Q5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

En posant $a = 1 + \frac{z}{n}$ et $b = e^{z/n}$, on a :

$$|a| = \left|1 + \frac{z}{n}\right| \leq 1 + \frac{|z|}{n} \leq e^{|z|/n}$$

$$|b| = \left|e^{z/n}\right| = e^{\mathrm{Re}(z)/n} \leq e^{|z|/n} \quad (\text{car } \mathrm{Re}(z) \leq |z|)$$

Donc, $M = \max(|a|, |b|) \leq e^{|z|/n}$ et avec la question précédente, on obtient :

$$\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| = \left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - (e^{z/n})^n\right| \leq nM^{n-1}\left|1 + \frac{z}{n} - e^{z/n}\right| \leq ne^{\frac{(n-1)|z|}{n}}\left|1 + \frac{z}{n} - e^{z/n}\right|.$$

D'après la question **Q3**, on a $\left|1 + \frac{z}{n} - e^{z/n}\right| \leq \left|\frac{z}{n}\right|^2 e^{\left|\frac{z}{n}\right|}$, donc

$$\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \leq ne^{\frac{(n-1)|z|}{n}}\left|\frac{z}{n}\right|^2 e^{\left|\frac{z}{n}\right|} = n\frac{|z|^2}{n^2}e^{\frac{(n-1)|z|}{n}}e^{\frac{|z|}{n}}.$$

Soit :

$$\boxed{\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \leq \frac{|z|^2}{n}e^{|z|}}$$

Q6. Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{|z|^2 e^{|z|}}{n} = 0$, donc avec le théorème des gendarmes et $u_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, la question précédente permet de conclure que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } e^z.}$$

II Exemples de calcul de produit infini

II.A –

Q7. Soit un entier $N \geq 2$. Posons $P_N = \prod_{n=2}^{N}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ et $Q_N = \prod_{n=2}^{N}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

On a :

$$P_N = \prod_{n=2}^{N}\frac{n^2 - 1}{n^2} = \prod_{n=2}^{N}\frac{(n+1)(n-1)}{n^2} = \left(\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n}\right)\left(\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}\right) = \frac{N+1}{2}\frac{1}{N} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N}\right).$$

Alors, $P_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{2}$, donc le produit converge et vaut :

$$\boxed{\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}}$$

Par ailleurs :

$$Q_{2N}=\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)=\prod_{\substack{n=2\\ n\ pair}}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\times\prod_{\substack{n=2\\ n\ impair}}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right).$$

En réindexant chacun des deux produits, on obtient :

$$\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)=\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{2n}\right)\times\prod_{n=1}^{N-1}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)=\prod_{n=1}^{N}\frac{2n-1}{2n}\times\prod_{n=1}^{N-1}\frac{2n+2}{2n+1}$$
$$=\frac{1\times3\times\ldots\times(2N-1)}{2\times4\times\ldots\times(2N)}\times\frac{4\times\ldots\times(2N)}{3\times\ldots\times(2N-1)}=\frac{1}{2}$$

Alors :

$$Q_{2N+1}=\prod_{n=2}^{2N+1}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)=\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\times\left(1+\frac{(-1)^{2N+2}}{2N+1}\right)=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2N+1}\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{1}{2}$$

Ainsi, les suites $\left(Q_{2N}\right)_{N\geq2}$ et $\left(Q_{2N+1}\right)_{N\geq2}$ convergent vers $\frac{1}{2}$, donc $Q_N\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{1}{2}$ et :

$$\boxed{\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)=\frac{1}{2}}$$

II.B – Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u\mapsto\cos^n u$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donc W_n est bien défini.

Q8. Soit $n\in\mathbb{N}$.

En intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}W_{n+2}&=\int_0^{\pi/2}\cos^{n+2}u\,du=\int_0^{\pi/2}\left(\cos u\right)\left(\cos^{n+1}u\right)du\\&=\left[\left(\sin u\right)\left(\cos^{n+1}u\right)\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\left(\sin u\right)\left((n+1)(-\sin u)\cos^n u\right)du\\&=(n+1)\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 u\right)\left(\cos^n u\right)du=(n+1)\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2 u\right)\left(\cos^n u\right)du\\&=(n+1)\int_0^{\pi/2}\left(\cos^n u-\cos^{n+2}u\right)du=(n+1)W_n-(n+1)W_{n+2}\end{aligned}$$

Ainsi, $W_{n+2}=(n+1)W_n-(n+1)W_{n+2}$, d'où :

$$\boxed{(n+2)W_{n+2}=(n+1)W_n}$$

Aux rangs impairs, la relation ci-dessus devient : $(2n+3)W_{2n+3}=(2n+2)W_{2n+1}$.

Posons alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $V_n=W_{2n+1}\dfrac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$. On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$V_{n+1}=W_{2n+3}\frac{(2n+3)!}{2^{2n+2}\left((n+1)!\right)^2}=\frac{2n+2}{2n+3}W_{2n+1}\frac{(2n+3)(2n+2)}{4(n+1)^2}\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}=V_n.$$

Ainsi, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Enfin, on a $V_0 = W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos u \, du = [\sin u]_0^{\pi/2} = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 = 1$, soit :

$$\boxed{W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}$$

Q9. A l'aide de la formule de Stirling, on obtient :

$$W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}\left(\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\right)^2}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\dfrac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}} = \frac{2\pi n \dfrac{2^{2n} n^{2n}}{e^{2n}}}{\sqrt{2\pi}\,(2n+1)^{3/2}\,\dfrac{(2n+1)^{2n}}{e^{2n+1}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-2n}.$$

Or, $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{-2n} = e^{-2n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = e^{-2n\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{(-1+o(1))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$ et ainsi :

$$\boxed{W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right) = \prod_{n=1}^{N}\frac{4n^2}{4n^2-1} = \prod_{n=1}^{N}\frac{2^2 n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2^{2N}\left(\displaystyle\prod_{n=1}^{N} n\right)^2}{\left(\displaystyle\prod_{n=1}^{N}(2n-1)\right)\left(\displaystyle\prod_{n=1}^{N}(2n+1)\right)}$$

$$= \frac{2^{2N}(N!)^2}{\left(1\times 3\times\ldots\times(2N-1)\right)\left(3\times\ldots\times(2N+1)\right)} = \frac{2^{2N}(N!)^2\left(2\times 4\times\ldots\times(2N)\right)^2}{(2N)!(2N+1)!}$$

$$= (2N+1)\left(\frac{2^{2N}(N!)^2}{(2N+1)!}\right)^2 = (2N+1)\left(W_{2N+1}\right)^2$$

Alors :

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} (2N+1)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{N}}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2N}\right).$$

Ainsi, le produit $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right)$ converge et vaut :

$$\boxed{\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

III Étude d'une fonction définie par un produit infini

III.A –

Q10. Pour tout $x \in S$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(x) - Q_n(x) &= \prod_{k=1}^{n+1}\left(1+|f_k(x)|\right) - \prod_{k=1}^{n}\left(1+|f_k(x)|\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(1+|f_k(x)|\right)\left[\left(1+|f_{n+1}(x)|\right)-1\right] \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+|f_k(x)|\right)\right)|f_{n+1}(x)|
\end{aligned}$$

Et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $|f_k(x)| \in [-1\,;+\infty[$, donc, avec la question **Q2**, on peut écrire :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+|f_k(x)|\right) \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|\right).$$

Toutes les fonctions $|f_n|$ sont continues sur S et la série $\sum |f_n|$ converge uniformément sur S vers la fonction R_0, donc R_0 est continue sur le segment S : elle est majorée sur S. Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|R_0| \leq M$.

Enfin, toutes les fonctions $|f_n|$ sont positives sur S, donc pour tout $x \in S$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n}|f_k(x)| \leq R_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}|f_k(x)| \leq M.$$

Ainsi, $\exp\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|\right) \leq e^M$ et finalement, il existe bien $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in S$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leq e^M\,|f_{n+1}(x)|}$$

Q11. Soient $x \in S$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme ci-dessus, on a :

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+f_k(x)\right)\right)f_{n+1}(x).$$

Donc :

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| = \left|\prod_{k=1}^{n}\left(1+f_k(x)\right)\right||f_{n+1}(x)| = \left(\prod_{k=1}^{n}|1+f_k(x)|\right)|f_{n+1}(x)|.$$

Comme pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $0 \leq |1+f_k(x)| \leq 1+|f_k(x)|$, on a $\prod_{k=1}^{n}|1+f_k(x)| \leq \prod_{k=1}^{n}\left(1+|f_k(x)|\right)$.

D'où, $|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+|f_k(x)|\right)\right)|f_{n+1}(x)|$, soit pour tout $x \in S$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq Q_{n+1}(x) - Q_n(x)}$$

Q12. D'après les deux questions précédentes, on a pour tout $x \in S$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|P_{n+1}(x) - P_n(x)\right| \leq e^M \left|f_{n+1}(x)\right|.$$

Or, e^M est une constante positive et la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge uniformément, donc simplement sur S. Par comparaison, la série de fonctions $\sum |P_{n+1} - P_n|$ converge simplement sur S, donc la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur S vers la fonction $P : S \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + f_n(x)\right)$ (par définition d'un produit infini donnée au début de l'énoncé).

De plus, pour tout $x \in S$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(x) - P_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty}\left(P_{k+1}(x) - P_k(x)\right).$$

Comme les séries $\sum |P_{n+1}(x) - P_n(x)|$ et $\sum |f_n(x)|$ convergent, on peut écrire :

$$\left|P(x) - P_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty}\left(P_{k+1}(x) - P_k(x)\right)\right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty}\left|P_{k+1}(x) - P_k(x)\right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} e^M \left|f_{k+1}(x)\right| = e^M R_n(x)$$

avec $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left|f_k(x)\right|$.

Enfin, comme la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge uniformément sur S, la suite de fonctions positives $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur S, soit :

$$\|R_n\|_\infty = \sup_S R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Or, pour tout $x \in S$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|P(x) - P_n(x)\right| \leq e^M R_n(x) \leq e^M \|R_n\|_\infty.$$

Et comme $e^M \|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on peut conclure par hypothèse de domination que :

La suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur S vers $P : \begin{cases} S \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + f_n(x)\right) \end{cases}$.

Q13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur S, donc $P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + f_k\right)$ l'est aussi en tant que produit de telles fonctions.

Alors, comme $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur S vers P :

La fonction P est continue sur S.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est à valeurs dans $]-1,+\infty[$, donc $1+f_n > 0$ et par conséquent, $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+f_k) > 0$. On peut donc écrire $\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+f_k)$.

Soit $x \in S$ fixé.

Comme la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge uniformément sur S, elle converge simplement sur S, donc la série numérique $\sum |f_n(x)|$ converge.

Ceci implique entre autres que $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc que $|\ln(1+f_n(x))| \underset{n \to +\infty}{\sim} |f_n(x)|$ et par comparaison de séries positives, la série numérique $\sum |\ln(1+f_n(x))|$ converge.

Ainsi, la série numérique $\sum \ln(1+f_n(x))$ converge absolument donc converge, soit :

$$\ln P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+f_k(x)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi(x).$$

Par continuité de la fonction exponentielle, on obtient $P_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{\varphi(x)} = P(x)$ et ainsi, pour tout $x \in S$, $P(x) = e^{\varphi(x)} > 0$, et donc :

$$\boxed{\text{La fonction } P \text{ ne s'annule pas sur } S.}$$

III.B –

Q14. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = -e^{-nx^2}$.

- $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $]-1,0[\subset]-1,+\infty[$.
- Pour tout segment $S = [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sup_{x \in S} |f_n(x)| = e^{-na^2} = (e^{-a^2})^n$ et la série géométrique $\sum (e^{-a^2})^n$ converge (car $a \neq 0$, donc $0 < e^{-a^2} < 1$).

  Ainsi, la série $\sum |f_n|$ converge normalement donc uniformément sur S.

Nous avons donc réuni toutes les hypothèses pour conclure, d'après les questions précédentes, que la fonction $f : x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty}(1+f_n(x)) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-e^{-nx^2}\right)$ est définie et continue sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, et ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-e^{-nx^2}\right) \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Q15. D'après **Q13**, la fonction $\ln f$ est définie sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, avec pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln(f(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+f_n(x)).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n, donc $\ln(1+f_n)$, sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ et ainsi, pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$, on a $\ln(1+f_n(b)) - \ln(1+f_n(a)) > 0$, d'où :

$$\ln(f(b)) - \ln(f(a)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln(1+f_n(b)) - \ln(1+f_n(a)) \right] > 0.$$

Ceci donne $f(b) > f(a)$ et ainsi :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n(x) = \ln\left(1 - e^{-nx^2}\right) = \ln(1+f_n(x))$.

Sous réserve d'existence, on a alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(f(x)) = \lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+f_n(x)) = \lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est croissante et négative sur $\mathbb{R}_+^*$, donc :

$$\sup_{x \in [1, +\infty[} |g_n(x)| = |g_n(1)| = \left| \ln\left(1 - e^{-n}\right) \right| \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-n}$$

La série géométrique $\sum e^{-n}$ converge (car $0 < e^{-1} < 1$), donc la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[1, +\infty[$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = 0$, donc avec le théorème de la limite double, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} g_n(x) = 0.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(f(x)) = 0$ et, par continuité de la fonction exponentielle en 0, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 < 1 - e^{-nx^2} < 1.$$

Donc, $0 < \prod\limits_{n=2}^{+\infty} \left(1 - e^{-nx^2}\right) < 1$ et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$0 < f(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - e^{-nx^2}\right) < 1 - e^{-x^2}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 - e^{-x^2}\right) = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 0}$$

III.C –

Q16. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $x\in S$, $P_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+f_k(x)\right)$.

Comme toutes les fonctions f_k sont de classe C^1 sur S, P_n est de classe C^1 sur S comme produit de telles fonctions. De plus, pour tout $x\in S$:

$$P_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(f_j'(x)\prod_{j=1,\,j\neq k}^{n}\left(1+f_j(x)\right)\right).$$

Comme pour tout $j\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in S$, $1+f_j(x)\neq 0$ (f_j est à valeurs dans $\left]-1,+\infty\right[$), on peut écrire :

$$P_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(f_j'(x)\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(1+f_j(x)\right)}{1+f_k(x)}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(f_j'(x)\frac{P_n(x)}{1+f_k(x)}\right).$$

Soit finalement, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in S$:

$$\boxed{P_n'(x)=P_n(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k'(x)}{1+f_k(x)}}$$

Q17. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de fonctions continues qui convergent uniformément sur S vers *u* et *v* respectivement.

On a alors $\lim_{n\to+\infty}\|u_n-u\|_\infty=\lim_{n\to+\infty}\|v_n-v\|_\infty=0$ et les fonctions *u* et *v* sont continues sur S.

Comme S est un segment, *u* et *v* sont bornées, donc il existe un réel $M>0$ tel que $|u|\leq M$ et $|v|\leq M$.

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in S$:

$$\begin{aligned}
|u_n(x)v_n(x)-u(x)v(x)| &= |u_n(x)v_n(x)-u_n(x)v(x)+u_n(x)v(x)-u(x)v(x)|\\
&\leq |u_n(x)v_n(x)-u_n(x)v(x)|+|u_n(x)v(x)-u(x)v(x)|\\
&\leq |u_n(x)||v_n(x)-v(x)|+|v(x)||u_n(x)-u(x)|\\
&\leq |u_n(x)|\|v_n-v\|_\infty+|v(x)|\|u_n-u\|_\infty\\
&\leq |u_n(x)-u(x)+u(x)|\|v_n-v\|_\infty+|v(x)|\|u_n-u\|_\infty\\
&\leq \left(|u_n(x)-u(x)|+|u(x)|\right)\|v_n-v\|_\infty+|v(x)|\|u_n-u\|_\infty\\
&\leq \left(\|u_n-u\|_\infty+M\right)\|v_n-v\|_\infty+M\|u_n-u\|_\infty
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|u_nv_n-uv\|_\infty\leq\left(\|u_n-u\|_\infty+M\right)\|v_n-v\|_\infty+M\|u_n-u\|_\infty.$$

Et comme on a $\left(\|u_n-u\|_\infty+M\right)\|v_n-v\|_\infty+M\|u_n-u\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\|u_n-u\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\|v_n-v\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\|u_nv_n-uv\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et ainsi, la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent uniformément vers uv sur S.

On a vu que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément, donc simplement, sur S vers la fonction P (question **Q12**) et que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, P_n est de classe C^1, donc continue, sur S (question précédente).

De plus, la série de fonctions continues $\sum\frac{f_n'}{1+f_n}$ converge uniformément sur S, donc la suite de fonctions continues $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k'}{1+f_k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur S. Alors, avec $P_n'=P_n\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k'}{1+f_k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et ce qui l'on a vu au début de la question, la suite $(P_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur S vers $P\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f_n'}{1+f_n}$.

Toutes les hypothèses sont réunies pour conclure que la fonction P est de classe C^1 sur S avec $P'=P\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f_n'}{1+f_n}$.

Enfin, d'après la question **Q13**, P ne s'annule pas sur S, donc :

$$\boxed{P=\prod_{n=1}^{+\infty}(1+f_n)\ \text{est de classe } C^1 \text{ sur } S \text{ avec } \frac{P'}{P}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f_n'}{1+f_n}.}$$

IV Expression de la fonction sinus comme produit infini

IV.A –

Q18. On a :

$$\begin{aligned}
P_n(X)&=\frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1}-\left(1-\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)\\
&=\frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\left(\frac{iX}{2n+1}\right)^k-\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\left(\frac{iX}{2n+1}\right)^k\right)\\
&=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{1-(-1)^k}{2i}i^k\binom{2n+1}{k}\frac{1}{(2n+1)^k}X^k=\sum_{\substack{k=0\\ k\ impair}}^{2n+1}\frac{1-(-1)}{2i}i^k\binom{2n+1}{k}\frac{1}{(2n+1)^k}X^k\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\frac{1}{(2n+1)^{2k+1}}X^{2k+1}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{P_n \text{ est bien un polynôme réel de degré } 2n+1 \text{ et de coefficient dominant } \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}}.}$$

Q19. Pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$, posons $\alpha_k = \dfrac{k\pi}{2n+1}$.

Remarquons que $0 \le \alpha_k < \pi$ et si $\alpha_k \neq \dfrac{\pi}{2}$ (car sinon $2k = 2n+1$ qui est absurde).

Ainsi, $x_k = (2n+1)\tan\alpha_k$ est bien défini et on a :

$$\begin{aligned}
P_n(x_k) &= \frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{i}{2n+1}(2n+1)\tan\alpha_k\right)^{2n+1} - \left(1-\frac{i}{2n+1}(2n+1)\tan\alpha_k\right)^{2n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\left(1+i\frac{\sin\alpha_k}{\cos\alpha_k}\right)^{2n+1} - \left(1-i\frac{\sin\alpha_k}{\cos\alpha_k}\right)^{2n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\left(\frac{e^{i\alpha_k}}{\cos\alpha_k}\right)^{2n+1} - \left(\frac{e^{-i\alpha_k}}{\cos\alpha_k}\right)^{2n+1}\right)\\
&= \frac{1}{(\cos\alpha_k)^{2n+1}}\frac{e^{i(2n+1)\alpha_k} - e^{-i(2n+1)\alpha_k}}{2i}\\
&= \frac{\sin((2n+1)\alpha_k)}{(\cos\alpha_k)^{2n+1}} = \frac{\sin(k\pi)}{(\cos\alpha_k)^{2n+1}} = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, les x_k sont des racines de P_n.

- Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $0 \le \dfrac{k\pi}{2n+1} < \dfrac{\pi}{2}$ et comme la fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a : $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.
- Pour tout $k \in [\![n+1,2n]\!]$, on a $2n+1-k \in [\![1,n]\!]$ et $\alpha_k = \pi - \alpha_{2n+1-k}$, donc :

  $$x_k = (2n+1)\tan\alpha_k = (2n+1)\tan(\pi - \alpha_{2n+1-k}) = -(2n+1)\tan\alpha_{2n+1-k} = -x_{2n+1-k}.$$

  Or, $-x_n < \ldots < -x_1 < 0$, ce qui donne : $x_{n+1} < \ldots < -x_{2n} < 0$.

Ainsi, $x_{n+1} < x_{n+2} < \ldots < x_{2n} < x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ et les x_k sont $2n+1$ racines distinctes de P_n. Comme P_n est de degré $2n+1$, il ne peut avoir d'autre racine et finalement :

$$\boxed{\text{L'ensemble des racines de } P_n \text{ est bien } \{x_k \mid k \in [\![0,2n]\!]\}.}$$

Q20. D'après la question précédente, le polynôme réel P_n est scindé dans $\mathbb{R}$, donc si $\mu \in \mathbb{R}$ est le coefficient dominant de P_n (on a même vu que $\mu = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}}$), on a $P_n(X) = \mu \prod_{k=0}^{2n}(X - x_k)$.

Avec $x_0 = 0$ et pour tout $k \in [\![n+1,2n]\!]$, $x_k = -x_{2n+1-k}$, on peut alors écrire :

$$P_n(X) = \mu(X - x_0)\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)\prod_{k=n+1}^{2n}(X - x_k) = \mu X \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)\prod_{k=n+1}^{2n}(X + x_{2n+1-k}).$$

En effectuant un changement d'indice dans le second produit ($k' = 2n+1-k$), on obtient, avec $x_k \neq 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$P_n(X) = \mu X \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)\prod_{k=1}^{n}(X + x_k) = \mu X \prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - x_k^2\right)$$
$$= (-1)^n \mu X \prod_{k=1}^{n}\left(x_k^2 - X^2\right) = (-1)^n \mu \left(\prod_{k=1}^{n} x_k^2\right) X \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{X^2}{x_k^2}\right)$$

Et ainsi, en posant $\lambda = (-1)^n \mu \left(\prod_{k=1}^{n} x_k^2\right)$, on obtient bien :

$$\boxed{P_n(X) = \lambda X \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{X^2}{x_k^2}\right)}$$

Q21. On a $P_n(X) = \frac{1}{2i}\left(\left(1 + \frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)$, donc :

$$P_n'(X) = \frac{1}{2i}\left((2n+1)\frac{i}{2n+1}\left(1 + \frac{iX}{2n+1}\right)^{2n} + (2n+1)\frac{i}{2n+1}\left(1 - \frac{iX}{2n+1}\right)^{2n}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{iX}{2n+1}\right)^{2n} + \left(1 - \frac{iX}{2n+1}\right)^{2n}\right)$$

Et ainsi : $\underline{P_n'(0) = 1}$.

Mais, $P_n(X) = \lambda X Q_n(X)$ avec $Q_n(X) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{X^2}{x_k^2}\right)$, donc :

$$P_n'(X) = \lambda Q_n(X) + \lambda X Q_n'(X).$$

Alors : $\underline{P_n'(0) = \lambda Q_n(0) = \lambda}$.

Ainsi, $P_n'(0) = \lambda = 1$ et donc :

$$\boxed{P_n(X) = X \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{X^2}{x_k^2}\right)}$$

Remarquons qu'avec $\mu = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}}$ et $\lambda = (-1)^n \mu \left(\prod_{k=1}^{n} x_k^2\right)$, on obtient :

$$\lambda = (-1)^n \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}}\left(\prod_{k=1}^{n} x_k^2\right) = \frac{1}{2n+1}\left(\prod_{k=1}^{n}\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2.$$

Avec $\lambda = 1$, ceci donne $\left(\prod_{k=1}^{n}\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2 = 2n+1$, donc $\prod_{k=1}^{n}\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sqrt{2n+1}$ car $\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) > 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

Q22. On rappelle ici P_n la fonction polynomiale associée au polynôme P_n.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après la question **Q6**, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{ix}{n}\right)^n = e^{ix}$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{ix}{2n+1}\right)^{2n+1} = e^{ix} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{ix}{2n+1}\right)^{2n+1} = e^{-ix}.$$

Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} P_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{2i}\left(\left(1 + \frac{ix}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{ix}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)\right] = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \sin x.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (P_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ vers la fonction sinus.}}$$

IV.B – Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On a $t \geq k$ si et seulement si $\lfloor t \rfloor \geq k$ et on peut écrire :

$$v_k(t) = \begin{cases} x \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{x^2}{\left(2\lfloor t \rfloor + 1\right)^2 \tan^2\left(\dfrac{j\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1}\right)}\right) & \text{quand } \lfloor t \rfloor \geq k \\ x \displaystyle\prod_{j=1}^{\lfloor t \rfloor} \left(1 - \frac{x^2}{\left(2\lfloor t \rfloor + 1\right)^2 \tan^2\left(\dfrac{j\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1}\right)}\right) & \text{quand } \lfloor t \rfloor < k \end{cases}$$

Soit :

$$v_k(t) = x \prod_{j=1}^{\min(k, \lfloor t \rfloor)} \left(1 - \frac{x^2}{\left(2\lfloor t \rfloor + 1\right)^2 \tan^2\left(\dfrac{j\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1}\right)}\right).$$

Q23. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, considérons deux cas.

- Si $\lfloor t \rfloor \leq k - 1$, alors $\min\left(k-1, \lfloor t \rfloor\right) = \min\left(k, \lfloor t \rfloor\right) = \lfloor t \rfloor$, donc $v_k(t) = v_{k-1}(t)$, soit :

$$\left|v_k(t) - v_{k-1}(t)\right| = 0 \leq \frac{x^2}{k^2\pi^2}\left|v_{k-1}(t)\right|.$$

- Si $\lfloor t \rfloor \geq k$, alors $\min\left(k-1, \lfloor t \rfloor\right) = k-1$ et $\min\left(k, \lfloor t \rfloor\right) = k$, donc :

$$v_k(t) = v_{k-1}(t)\left(1 - \frac{x^2}{\left(2\lfloor t \rfloor + 1\right)^2 \tan^2\left(\dfrac{k\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1}\right)}\right).$$

Et :

$$\left|v_k(t) - v_{k-1}(t)\right| = \frac{x^2}{\left(2\lfloor t \rfloor + 1\right)^2 \tan^2\left(\dfrac{k\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1}\right)}\left|v_{k-1}(t)\right|.$$

La fonction tangente convexe sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (car $\tan'' = 2(1+\tan^2)\tan \geq 0$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$), donc sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0, soit pour tout $u \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan u \geq u$.

Or, on a ici $0 < k \leq \lfloor t \rfloor$, donc $\dfrac{k\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et ainsi, $\tan\left(\dfrac{k\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1}\right) \geq \dfrac{k\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1} > 0$.

Ceci donne $\left(2\lfloor t \rfloor + 1\right)^2 \tan^2\left(\dfrac{k\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1}\right) \geq k^2\pi^2 > 0$ et donc :

$$\left|v_k(t) - v_{k-1}(t)\right| = \frac{x^2}{k^2\pi^2}\left|v_{k-1}(t)\right|.$$

Finalement, on obtient bien pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout entier $k \geq 2$:

$$\boxed{\left|v_k(t) - v_{k-1}(t)\right| \leq \frac{x^2}{k^2\pi^2}\left|v_{k-1}(t)\right|}$$

Q24. Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\left|v_k(t)\right| = |x| \prod_{j=1}^{\min(k,\lfloor t \rfloor)} \left|1 - \frac{x^2}{\left(2\lfloor t \rfloor + 1\right)^2 \tan^2\left(\dfrac{j\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1}\right)}\right| \leq |x| \prod_{j=1}^{\min(k,\lfloor t \rfloor)} \left(1 + \frac{x^2}{\left(2\lfloor t \rfloor + 1\right)^2 \tan^2\left(\dfrac{j\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1}\right)}\right).$$

Et, par convexité de la fonction exponentielle, on obtient :

$$\left|v_k(t)\right| \leq |x| \prod_{j=1}^{\min(k,\lfloor t \rfloor)} \exp\left(\frac{x^2}{\left(2\lfloor t \rfloor + 1\right)^2 \tan^2\left(\dfrac{j\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1}\right)}\right).$$

On a vu dans la question précédente que $\dfrac{1}{(2\lfloor t\rfloor+1)^2\tan^2\left(\dfrac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor+1}\right)} \leq \dfrac{1}{j^2\pi^2}$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

donc :

$$|v_k(t)| \leq |x| \prod_{j=1}^{\min(k,\lfloor t\rfloor)} \exp\left(\frac{x^2}{j^2\pi^2}\right) = |x| \exp\left(\frac{x^2}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\min(k,\lfloor t\rfloor)} \frac{1}{j^2}\right).$$

Enfin, comme $\dfrac{1}{j^2} \geq 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et $\min(k,\lfloor t\rfloor) \leq k$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{\min(k,\lfloor t\rfloor)} \frac{1}{j^2} \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2}$ et ainsi :

$$\boxed{|v_k(t)| \leq |x| \exp\left(\frac{x^2}{\pi^2} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2}\right)}$$

Q25. Rappelons qu'ici, *x* est un réel fixé et que la variable des fonctions $v_k - v_{k-1}$ est *t*.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}$, donc en posant $M = |x| \exp\left(\dfrac{x^2}{\pi^2} \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}\right) \geq 0$, on obtient $|v_k(t)| \leq M$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Alors la question **Q23** donne pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout entier $k \geq 2$:

$$|v_k(t) - v_{k-1}(t)| \leq \frac{M x^2}{\pi^2} \frac{1}{k^2}.$$

Comme la série $\sum \dfrac{1}{k^2}$ converge, la série de fonctions $\sum (v_k - v_{k-1})$ vérifie l'hypothèse de domination, donc converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum (v_k - v_{k-1}) \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}_+.}$$

Q26. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor+1} = 0$, et comme $\tan u \underset{u \to 0}{\sim} u$, on a :

$$(2\lfloor t\rfloor+1)^2 \tan^2\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor+1}\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} (2\lfloor t\rfloor+1)^2 \left(\frac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor+1}\right)^2 = j^2\pi^2.$$

Quand $t \geq k$, on a $v_k(t) = x \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{x^2}{(2\lfloor t\rfloor+1)^2 \tan^2\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor+1}\right)}\right)$ et donc :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} v_k(t) = x \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{x^2}{j^2\pi^2}\right)}$$

Soit $t\in\mathbb{R}_+$.

Quand $k>t$, on a $v_k(t)=P_{\lfloor t\rfloor}(x)$ qui ne dépend pas de *k*, donc :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} v_k(t)=P_{\lfloor t\rfloor}(x)}$$

Q27. Résumons :

- d'après la question **Q22**, on a : $\lim\limits_{t\to+\infty} P_{\lfloor t\rfloor}(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x)=\sin x$;
- d'après la question **Q26**, on a alors :
$$\lim_{t\to+\infty}\lim_{k\to+\infty} v_k(t)=\sin x$$
- A partir d'un certain rang *N*, on a $0\le\dfrac{x^2}{j^2\pi^2}<1$. Or, $\ln\left(1-\dfrac{x^2}{j^2\pi^2}\right)\underset{j\to+\infty}{\sim}-\dfrac{x^2}{j^2\pi^2}$ et, comme la série de signe constant $\sum\left(-\dfrac{x^2}{j^2\pi^2}\right)$ converge, la série $\sum\limits_{j\ge N}\ln\left(1-\dfrac{x^2}{j^2\pi^2}\right)$ converge et ainsi, la suite $\left(\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1-\dfrac{x^2}{j^2\pi^2}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge. Alors :
$$\lim_{k\to+\infty}\lim_{t\to+\infty} v_k(t)=x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{j^2\pi^2}\right).$$
- d'après **Q25**, la série de fonctions $\sum(v_k-v_{k-1})$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, donc la série de fonctions $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ et on peut donc conclure :
$$\lim_{t\to+\infty}\lim_{k\to+\infty} v_k(t)=\lim_{k\to+\infty}\lim_{t\to+\infty} v_k(t).$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\sin x=x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)}$$

IV.C –

Q28. Pour tout $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x)=-\dfrac{x^2}{(n\pi)^2}$.

- $(f_n)_{n\ge1}$ est une suite de fonctions de classe C^1 (polynomiale) sur le segment $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.
- Pour tout $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, $|f_n(x)|=\dfrac{x^2}{(n\pi)^2}\le\dfrac{1}{4n^2}$ et la série $\sum\dfrac{1}{4n^2}$, donc la série de fonctions $\sum|f_n|$ converge normalement, donc uniformément sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

- Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
  - $|f_n(x)| \leq \frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{4}$, donc $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} \leq 1 + f_n(x) \leq 1 + \frac{1}{4}$ et ainsi, $0 < \frac{1}{1+f_n(x)} \leq \frac{4}{3}$;
  - $|f_n'(x)| = \frac{2|x|}{(n\pi)^2} \leq \frac{1}{\pi n^2}$.

Ainsi, $\left|\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}\right| \leq \frac{4}{3}\frac{1}{\pi n^2}$ la série $\sum \frac{4}{3}\frac{1}{\pi n^2}$ converge, donc la série de fonctions $\sum \frac{f_n'}{1+f_n}$ converge normalement, donc uniformément sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Toutes les hypothèses de la partie ***III.C*** sont réunies, donc la fonction $P : x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty}(1+f_n(x))$ est de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{2x}{(n\pi)^2}}{1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{(n\pi)^2 - x^2}.$$

Or, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$, $P(x) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right) = \frac{\sin x}{x}$ et :

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$, $\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{(n\pi)^2 - x^2}$, soit :

$$\boxed{\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{(n\pi)^2 - x^2}}$$

Q29. On a :

$$\frac{x\cos x - \sin x}{x^2 \sin x} = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - x + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{x^2\left(x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)} = \frac{-\frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} = \frac{-\frac{1}{3} + \underset{x\to 0}{o}(1)}{1 + \underset{x\to 0}{o}(1)}.$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2 \sin x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)\right] = -\frac{1}{3}.$$

Or, $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2x}{(n\pi)^2-x^2}\right)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{(n\pi)^2-x^2}$, donc :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\left[-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(n\pi)^2-x^2}\right]=-\frac{1}{3}.$$

Soit :

$$\lim_{x\to 0}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi^2}{\pi^2n^2-x^2}\right]=\frac{\pi^2}{6}.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit $g_n : x\mapsto\dfrac{\pi^2}{\pi^2n^2-x^2}$ définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\sup\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}|g_n(x)|=\left|g_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=\dfrac{1}{4n^2-1}$ et la série $\sum\dfrac{1}{4n^2-1}$ converge, donc la série $\sum g_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to 0}g_n(x)=\dfrac{\pi^2}{\pi^2n^2}=\dfrac{1}{n^2}$.

Ainsi, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lim\limits_{x\to 0}g_n(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}g_n(x)\right)$, soit :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

Problème 2 : Extrait de CCP 2019 - PSI

I Éléments propres d'une matrice

I.1 – Localisation des valeurs propres

Q30. On a $AX = \lambda X$ et $AX = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right)_{1\le i\le n}$, donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\boxed{\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j}$$

Q31. En prenant $i = i_0$ et en passant aux modules dans la relation ci-dessus, on obtient avec l'inégalité triangulaire :

$$\left|\lambda x_{i_0}\right| = |\lambda|\left|x_{i_0}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j\right| \le \sum_{j=1}^{n}\left|a_{i_0,j}x_j\right| = \sum_{j=1}^{n}\left|a_{i_0,j}\right|\left|x_j\right|.$$

Or, pour tout $\left|x_{i_0}\right| = \max_{1\le i\le n}|x_i|$, donc pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\left|x_j\right| \le \left|x_{i_0}\right|$ et ainsi :

$$|\lambda|\left|x_{i_0}\right| \le \sum_{j=1}^{n}\left|a_{i_0,j}\right|\left|x_j\right| \le \sum_{j=1}^{n}\left|a_{i_0,j}\right|\left|x_{i_0}\right| = \left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i_0,j}\right|\right)\left|x_{i_0}\right|.$$

Enfin, $\left|x_{i_0}\right| \ge 0$ et si $\left|x_{i_0}\right| = \max_{1\le i\le n}|x_i| = 0$, alors $x_i = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et donc $X = 0$, ce qui est absurde car par hypothèse $X \ne 0$. Donc, $\left|x_{i_0}\right| \ne 0$.

On peut alors diviser l'inégalité ci-dessus par $\left|x_{i_0}\right| > 0$ sans en changer le sens, ce qui donne :

$$\boxed{|\lambda| \le \sum_{j=1}^{n}\left|a_{i_0,j}\right|}$$

On a $\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i_0,j}\right| \le \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right)$ et par transitivité de l'inégalité, on obtient :

$$\boxed{|\lambda| \le \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right)}$$

Q32. Si on note $A_n(\alpha,\beta) = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right| = \begin{cases} |\alpha| + |\beta| & \text{si } i = 1 \text{ ou } n \\ |\alpha| + 2|\beta| & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc, $\max\limits_{1\leq i\leq n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right)=|\alpha|+2|\beta|$ et d'après la question précédente, pour toute valeur propre $\lambda\in\mathbb{R}$ de $A_n(\alpha,\beta)$, on a bien :

$$\boxed{|\lambda|\leq|\alpha|+2|\beta|}$$

I.2 – Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$

Q33. Ici, $\alpha=0$ et $\beta=1$, donc, d'après la question précédente, toute valeur propre $\lambda\in\mathbb{R}$ de $A_n(0,1)$ vérifie $|\lambda|\leq 2$, soit $-1\leq\dfrac{\lambda}{2}\leq 1$ et donc :

$$\boxed{\text{Il existe un unique } \theta\in[0,\pi] \text{ tel que } \lambda=2\cos\theta.}$$

Q34. En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$U_{n+2}(X)=\chi_{A_{n+1}(0,1)}(2X)=\begin{vmatrix} 2X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2X \end{vmatrix}_{n+2} = 2X\,U_{n+1}(X)+\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2X \end{vmatrix}_{n+1}$$

Et, en développant le dernier déterminant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\boxed{U_{n+2}(X)=2X\,U_{n+1}(X)-U_n(X)}$$

Soit $\theta\in\left]0,\pi\right[$. Prouvons par récurrence double sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$U_n(\cos\theta)=\frac{\sin\left((n+1)\theta\right)}{\sin\theta}.$$

Initialisation : On a $U_1=2X$ et $U_2=\begin{vmatrix} 2X & -1 \\ -1 & 2X \end{vmatrix}=4X^2-1$, donc :

$$U_1(\cos\theta)=2\cos\theta=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(2\theta)}{\sin\theta}.$$

Et :

$$\begin{aligned}\sin(3\theta)=\sin(2\theta+\theta)&=\sin(2\theta)\cos\theta+\sin\theta\cos(2\theta)\\ &=2\sin\theta\cos^2\theta+\sin\theta\left(2\cos^2\theta-1\right)=\sin\theta\left(4\cos^2\theta-1\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$U_2(\cos\theta)=4\cos^2\theta-1=\frac{\sin(3\theta)}{\sin\theta}$$

La relation est donc vraie aux rangs $n=1$ et $n=2$.

Hérédité : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, supposons la relation vraie aux rangs n et $n+1$.

Alors, avec la relation précédente :

$$U_{n+2}(\cos\theta)=2\cos\theta\; U_{n+1}(\cos\theta)-U_n(\cos\theta).$$

Et par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
U_{n+2}(\cos\theta)&=2\cos\theta\,\frac{\sin\big((n+2)\theta\big)}{\sin\theta}-\frac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta}\\
&=\frac{2\sin\big((n+2)\theta\big)\cos\theta-\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta}\\
&=\frac{\sin\big((n+2)\theta+\theta\big)+\sin\big((n+2)\theta-\theta\big)-\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta}\\
&=\frac{\sin\big((n+3)\theta\big)}{\sin\theta}
\end{aligned}$$

La relation est donc vraie au rang $n+2$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit pour tout $\theta\in\,]0,\pi[$:

$$\boxed{U_n(\cos\theta)=\frac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta}}$$

Q35. D'après la question **Q33**, pour tout $\lambda\in Sp\big(A_n(0,1)\big)\subset[-2,2]$, il existe un unique $\theta\in[0,\pi]$ tel que $\lambda=2\cos\theta$. Alors, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\lambda=2\cos\theta\in Sp\big(A_n(0,1)\big)\quad\Leftrightarrow\quad \chi_{A_n(0,1)}(\lambda)=\chi_{A_n(0,1)}\big(2\cos\theta\big)=0\quad\Leftrightarrow\quad U_n(\cos\theta)=0.$$

Or, si $\theta\in\,]0,\pi[$, soit $\lambda\in\,]-2,2[$, on a :

$$U_n(\cos\theta)=0\quad\Leftrightarrow\quad \sin\big((n+1)\theta\big)=0\quad\Leftrightarrow\quad \theta=\frac{j\pi}{n+1},\ j\in[\![1,n]\!].$$

Ainsi :

$$\lambda\in Sp\big(A_n(0,1)\big)\backslash\{-2;2\}\quad\Leftrightarrow\quad\lambda\in\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right),\ j\in[\![1,n]\!]\right\}.$$

Ceci donne $\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right),\ j\in[\![1,n]\!]\right\}\subset Sp\big(A_n(0,1)\big)$.

Or, la fonction cosinus est strictement décroissante, donc injective, sur $]0,\pi[$ et l'ensemble $\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right),\ j\in[\![1,n]\!]\right\}$ contient exactement n éléments distincts.

Or, $A_n(0,1)$ est une matrice $n\times n$ donc admet au plus n valeurs propres distinctes et ainsi :

$$\boxed{Sp\big(A_n(0,1)\big)=\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right),\ j\in[\![1,n]\!]\right\}}$$

Alors, $A_n(0,1)$ admet exactement n valeurs propres distinctes, donc :

$$\boxed{\text{Chaque valeur propre de } A_n(0,1) \text{ est de multiplicité 1 et la dimension du sous-espace propre associé est aussi égale à 1.}}$$

Q36. Soient $j \in [\![1,n]\!]$ et $X = (x_i)_{1\le i\le n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos\theta_j$ avec $\theta_j = \dfrac{j\pi}{n+1}$. On a $A_n(0,1)X = \left(2\cos\theta_j\right)X$, soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(2\cos\theta_j\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_2 = \left(2\cos\theta_j\right)x_1 \\ x_1 + x_3 = \left(2\cos\theta_j\right)x_2 \\ \quad\vdots \\ x_{n-2} + x_n = \left(2\cos\theta_j\right)x_{n-1} \\ x_{n-1} = \left(2\cos\theta_j\right)x_n \end{cases}$$

Et avec $x_0 = x_{n+1} = 0$, ceci revient à pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\boxed{x_{k+2} - 2\left(\cos\theta_j\right)x_{k+1} + x_k = 0}$$

La suite finie $(x_i)_{1\le i\le n}$ est donc la suite des termes de rangs 1 à n de l'unique suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = u_{n+1} = 0$ et vérifiant la relation de récurrence linéaire double pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_{k+2} - 2\left(\cos\theta_j\right)u_{k+1} + u_k = 0.$$

L'équation caractéristique associée à cette relation est $r^2 - 2\left(\cos\theta_j\right)r + 1 = 0$ dont les racines complexes conjuguées sont $e^{i\theta_j}$ et $e^{-i\theta_j}$. Alors, il existe $A, B \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_k = A e^{ik\theta_j} + B e^{-ik\theta_j}.$$

On a $u_0 = u_{n+1} = 0$, soit avec $\theta_j = \dfrac{j\pi}{n+1}$:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A e^{i(n+1)\theta_j} + B e^{-i(n+1)\theta_j} = (-1)^j(A+B) = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, $B = -A$, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_k = A(e^{ik\theta_j} - e^{-ik\theta_j}) = 2iA\sin(k\theta_j).$$

Comme $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on obtient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \sin\theta_j \\ \sin(2\theta_j) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_j) \end{pmatrix}$ avec $K \in \mathbb{R}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{L'espace propre de } A_n(0,1) \text{ associé à la valeur propre } 2\cos\theta_j \text{ est } \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sin\theta_j \\ \sin(2\theta_j) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_j) \end{pmatrix}\right).}$$

Q37. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On a $A_n(\alpha,\beta) = \alpha I_n + \beta A_n(0,1)$.

Si $\beta = 0$, $A_n(\alpha,0) = \alpha I_n$, donc :

$$\boxed{Sp\big(A_n(\alpha,0)\big) = \{\alpha\} \text{ et } \ker\big(A_n(\alpha,0) - \alpha I_n\big) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

Si $\beta \neq 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \chi_{A_n(\alpha,\beta)}(X) &= \det\big(X I_n - A_n(\alpha,\beta)\big) = \det\big(X I_n - \alpha I_n - \beta A_n(0,1)\big) \\ &= \det\left(\beta\left[\left(\frac{X-\alpha}{\beta}\right) I_n - A_n(0,1)\right]\right) = \beta^n \chi_{A_n(0,1)}\left(\frac{X-\alpha}{\beta}\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lambda \in Sp\big(A_n(\alpha,\beta)\big) \iff \chi_{A_n(\alpha,\beta)}(\lambda) = 0 \iff \chi_{A_n(0,1)}\left(\frac{\lambda-\alpha}{\beta}\right) = 0 \iff \frac{\lambda-\alpha}{\beta} \in Sp\big(A_n(0,1)\big).$$

Comme $Sp\big(A_n(0,1)\big) = \left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right),\ j \in [\![1,n]\!]\right\}$, on obtient :

$$\boxed{Sp\big(A_n(\alpha,\beta)\big) = \left\{\alpha + 2\beta\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right),\ j \in [\![1,n]\!]\right\}}$$

De plus, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, si $\lambda_j = \alpha + 2\beta\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$, on a :

$$\begin{aligned} \ker\big(A_n(\alpha,\beta) - \lambda_j I_n\big) &= \ker\left(\alpha I_n + \beta A_n(0,1) - \left(\alpha + 2\beta\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)\right) I_n\right) \\ &= \ker\left(\beta\left(A_n(0,1) - 2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) I_n\right)\right) \\ &= \ker\left(A_n(0,1) - 2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) I_n\right) \quad (\text{car } \beta \neq 0) \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\lambda_j = \alpha + 2\beta\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \in Sp\left(A_n(\alpha,\beta)\right)$:

$$\boxed{\ker\left(A_n(\alpha,\beta) - \lambda_j I_n\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sin\theta_j \\ \sin(2\theta_j) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_j) \end{pmatrix}\right)}$$

II Matrices par blocs

Q38. On a $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} D & 0_n \\ \hline -C & I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AD-BC & B \\ \hline CD-DC & D \end{array}\right)$ et comme C et D commutent :

$$\boxed{\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} D & 0_n \\ \hline -C & I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AD-BC & B \\ \hline 0_n & D \end{array}\right)}$$

Q39. D'après l'égalité ci-dessus et la formule d'un déterminant triangulaire par blocs, on peut écrire :

$$\det\left[\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} D & 0_n \\ \hline -C & I_n \end{array}\right)\right] = \det\left(\begin{array}{c|c} AD-BC & B \\ \hline 0_n & D \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\det\left(\begin{array}{c|c} D & 0_n \\ \hline -C & I_n \end{array}\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} AD-BC & B \\ \hline 0_n & D \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\times\det D\times\det I_n = \det\left(AD-BC\right)\times\det D$$

$$\Leftrightarrow \quad \det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\times\det D = \det\left(AD-BC\right)\times\det D$$

Si D est inversible, on a $\det D \neq 0$ et donc :

$$\boxed{\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \det\left(AD-BC\right)}$$

Q40. On ne suppose plus D inversible.

Si $Sp(D)\setminus\{0\} \neq \varnothing$, on pose $r = \min\left\{|\lambda|, \lambda \in Sp(D)\setminus\{0\}\right\}$, sinon on pose $r = 1$.

On a $r > 0$ et $\left(Sp(D)\setminus\{0\}\right) \cap \left]-r, r\right[= \varnothing$.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \left]-r, r\right[\setminus\{0\}$, $x \notin Sp(D)$, et donc $\det\left(D + xI_n\right) \neq 0$, autrement dit $D + xI_n$ est inversible.

En posant $N = \left\lfloor \frac{1}{r} \right\rfloor + 1$, on a alors, pour tout entier $k \geq N$, $-\frac{1}{k} \in \left]-r, r\right[\setminus \{0\}$ et donc $D + \frac{1}{k} I_n$ est inversible. Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien } N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que pour tout entier } k \geq N,\ D + \frac{1}{k} I_n \text{ est inversible.}}$$

Q41. On suppose *D* non inversible. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_k = D + \frac{1}{k} I_n$.

- *C* commute avec I_n et *D*, donc *C* commute avec D_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$;
- d'après la question précédente, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que tel que pour tout entier $k \geq N$, D_k est inversible.

Alors, d'après la question **Q39**, pour tout $k \geq N$:

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D_k \end{array} \right) = \det\left(AD_k - BC\right).$$

On a $\lim\limits_{k \to +\infty} D_k = D$, donc $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D_k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$ et par continuité du déterminant :

$$\lim_{k \to +\infty} \det\left(AD_k - BC\right) = \lim_{k \to +\infty} \det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D_k \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right).$$

Enfin, par linéarité à droite du produit matriciel, $M \mapsto AM$ est linéaire, donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (qui est de dimension finie). Alors, $M \mapsto AM - BC$ est aussi continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et par continuité du déterminant, $M \mapsto \det\left(AM - BC\right)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Ceci permet d'affirmer que $\lim\limits_{k \to +\infty} \det\left(AD_k - BC\right) = \det\left(AD - BC\right)$ (car $\lim\limits_{k \to +\infty} D_k = D$) et ainsi, même si *D* n'est pas inversible, on a encore :

$$\boxed{\det\left(\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)\right) = \det\left(AD - BC\right)}$$

Q42. On a $N = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & I_n \\ \hline M & 0_n \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ et $\chi_N(X) = \det \left(\begin{array}{c|c} X I_n & -I_n \\ \hline -M & X I_n \end{array} \right)$.

Comme $-M$ et $X I_n$ commutent, on peut utiliser la relation **(1)**, ce qui donne :

$$\chi_N(X) = \det \left(\begin{array}{c|c} X I_n & -I_n \\ \hline -M & X I_n \end{array} \right) = \det\left((X I_n)(X I_n) - (-I_n)(-M)\right) = \det\left(X^2 I_n - M\right) = \chi_M(X^2).$$

Ainsi :

$$\mu \in Sp(N) \iff \chi_N(\mu) = \chi_N(\mu^2) = 0 \iff \mu^2 \in Sp(M).$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{Sp(N) = \{\mu \in \mathbb{C}, \mu^2 \in Sp(M)\}}$$

Q43. Soient $X = (x_i)_{1 \le i \le n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ^2.

Comme X est un vecteur propre, $X \neq 0_{n,1}$, donc $\begin{pmatrix} X \\ \mu X \end{pmatrix} \neq 0_{2n,1}$ et :

$$N\begin{pmatrix} X \\ \mu X \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & I_n \\ \hline M & 0_n \end{array}\right)\begin{pmatrix} X \\ \mu X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu X \\ MX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu X \\ \mu^2 X \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} X \\ \mu X \end{pmatrix}.$$

Et comme $\begin{pmatrix} X \\ \mu X \end{pmatrix} \neq 0_{2n,1}$, on peut conclure que :

$$\boxed{\begin{pmatrix} X \\ \mu X \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \text{ est vecteur propre de } N \text{ associé à la valeur propre } \mu.}$$