Corrigé du DM n° 4

1) Soit $x \in [0,1]$ fixé.

La fonction g_x est définie et dérivable sur $I =]-\infty, \sqrt{x}]$ avec $g_x'(t) = 1 - t$.

Comme $x \in [0,1]$, on a $I =]-\infty, \sqrt{x}] \subset]-\infty, 1]$. Alors, $g_x'(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$, avec égalité seulement quand $x = t = 1$.

La fonction g_x est donc continue (car dérivable) et strictement croissante sur *I*. Ainsi :

$$g_x\left(\left[0, \sqrt{x}\right]\right) = \left[g_x(0), g_x(\sqrt{x})\right] = \left[\frac{1}{2}x, \sqrt{x}\right] \subset \left[0, \sqrt{x}\right] \quad \text{(car } x \in [0,1]\text{)}.$$

Comme $u_0 = 0 \in \left[0, \sqrt{x}\right]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et tous ses termes sont dans $\left[0, \sqrt{x}\right]$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g_x(u_n) - u_n = \frac{1}{2}(x - u_n^2)$ et $u_n \in \left[0, \sqrt{x}\right]$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Ainsi, la suite *u* est croissante et majorée par $\sqrt{x}$, donc elle converge vers une limite $\ell(x) \in \left[0, \sqrt{x}\right]$.

Comme g_x est continue sur $\left[0, \sqrt{x}\right]$, on a :

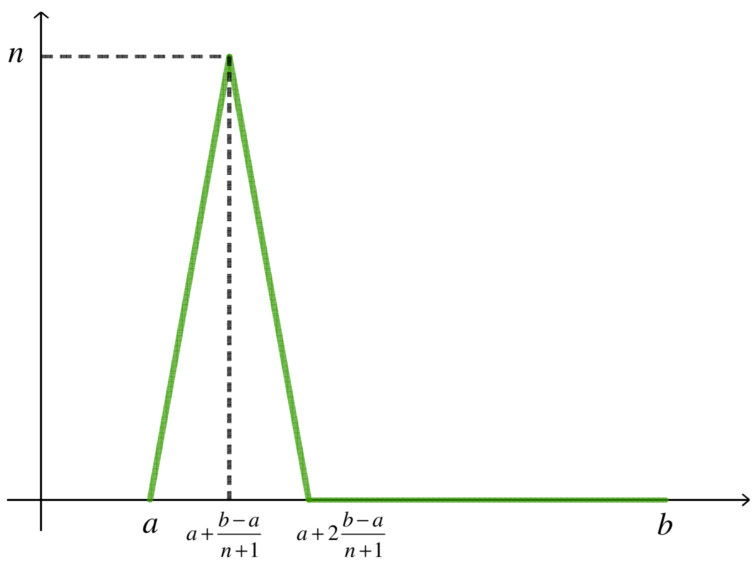
$$g_x\left(\ell(x)\right) = \ell(x) \iff \ell(x) + \frac{1}{2}\left(x - \ell(x)^2\right) = \ell(x) \iff \ell(x)^2 = x.$$

Et comme $\ell(x) \geq 0$, on a $\ell(x) = \sqrt{x}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \sqrt{x}.}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et la fonction f_n définie sur $[a,b]$, affine par morceaux, telle que sur le schéma ci-dessous :



On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(a)=0$ et pour tout $x\in\left]a,b\right]$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n\geq N$, $a+2\dfrac{b-a}{n+1}\leq x$ et donc $f_n(x)=0$. Ainsi, pour tout $x\in\left[a,b\right]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle qui est continue sur $[a,b]$.

Par contre, $\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f_n(x)\right|=n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément.

3) a. Prouvons par récurrence sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n est une fonction polynômiale.

- On a $P_0=0$, qui est polynômiale, donc la propriété est vraie au rang $n=0$.
- On suppose qu'à un rang $n\in\mathbb{N}$, P_n est une fonction polynômiale.

  Alors, $x\mapsto P_n(x)^2$ est polynômiale et il en va de même pour $x\mapsto\dfrac{1}{2}\left(x-P_n(x)^2\right)$. P_{n+1} est alors la somme de deux fonctions polynômiales, donc est polynômiale.

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ P_n \text{ est une fonction polynômiale.}}$$

b. Soit $x\in[0,1]$. Si on pose $u_n=P_n(x)$, on a $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{2}(x-u_n^2)$.

Alors, d'après la question 6, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{x}$. Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{La suite } (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } [0,1] \text{ vers la fonction } h:x\mapsto\sqrt{x}.}$$

c. On vient de voir que, sur sur $[0,1]$, la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $h:x\mapsto\sqrt{x}$, qui est continue sur $[0,1]$.

De plus, en reprenant les notations ci-dessus, on a vu dans la question 6 que pour tout $x\in[0,1]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(P_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$, $f_n(x)\leq f_{n+1}(x)$.

Ainsi, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et donc d'après le résultat admis :

$$\boxed{(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } [0,1] \text{ vers } h.}$$

4) a. Comme S_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$, on a $E(S_n)=nx$ et $V(S_n)=nx(1-x)$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n dit que pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$:

$$P\left(\left|S_n-E(S_n)\right|\geq a\right)=P\left(\left|S_n-nx\right|\geq a\right)\leq\frac{V(S_n)}{a^2}=\frac{nx(1-x)}{a^2}.$$

En prenant $a = n\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a bien $a \in \mathbb{R}_+^*$ (car $n > 0$) et :

$$P\left(\left|S_n - nx\right| \geq n\alpha\right) \leq \frac{nx(1-x)}{(n\alpha)^2} = \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}.$$

Or :

$$x(1-x) = x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Et ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{P\left(\left|S_n - nx\right| \geq n\alpha\right) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}}$$

b. On a $\Omega(S_n) = [\![0, n]\!]$, donc $\Omega\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \left\{f(0), f\left(\frac{1}{n}\right), \dots, f\left(\frac{k}{n}\right), \dots, f(1)\right\}$ et :

$$E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P\left(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P\left(S_n = k\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Soit :

$$\boxed{E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x)}$$

5) a. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\left(x, \frac{k}{n}\right) \in [0,1]^2$, donc, si $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$, on peut écrire :

$$\boxed{\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon}$$

b. On a :

$$\left|\sum_{0 \leq k \leq n,\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P\left(S_n = k\right)\right| \leq \sum_{0 \leq k \leq n,\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| P\left(S_n = k\right).$$

Et comme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, on a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |f(x)| \leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty.$$

Ainsi :

$$\left|\sum_{0 \leq k \leq n,\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P\left(S_n = k\right)\right| \leq \sum_{0 \leq k \leq n,\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha} 2\|f\|_\infty P\left(S_n = k\right) = 2\|f\|_\infty \sum_{0 \leq k \leq n,\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha} P\left(S_n = k\right).$$

Enfin, on a $\left\{k \in [\![0,n]\!], \left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha\right\}=\left\{k \in \Omega(S_n), \left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha\right\}$ est l'évènement $\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)$, donc :

$$\sum_{0\le k\le n,\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha} P\left(S_n=k\right)=P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right).$$

Et ainsi :

$$\boxed{\left|\sum_{0\le k\le n,\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|\le 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)}$$

c. On a $\sum_{k=0}^{n} P\left(S_n=k\right)=1$, avec $P\left(S_n=k\right)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, donc :

$$\begin{aligned}\left|B_n(f)(x)-f(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-f(x)\sum_{k=0}^{n}P\left(S_n=k\right)\right|\\ &= \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)P\left(S_n=k\right)-\sum_{k=0}^{n}f(x)P\left(S_n=k\right)\right|\\ &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|\\ &= \left|\sum_{0\le k\le n,\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)+\sum_{0\le k\le n,\left|x-\frac{k}{n}\right|\le\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|\end{aligned}$$

Donc :

$$\left|B_n(f)(x)-f(x)\right|\le\left|\sum_{0\le k\le n,\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|+\left|\sum_{0\le k\le n,\left|x-\frac{k}{n}\right|\le\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|.$$

D'après la question précédente, on a :

$$\left|\sum_{0\le k\le n,\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|\le 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right).$$

Et, $\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)=\left(\left|S_n-nx\right|>n\alpha\right)\subset\left(\left|S_n-nx\right|\ge n\alpha\right)$, donc :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)\le P\left(\left|S_n-nx\right|\ge n\alpha\right).$$

D'après la question 9.a, on a $P\left(\left|S_n-nx\right|\ge n\alpha\right)\le\frac{1}{4n\alpha^2}$, donc :

$$\left|\sum_{0\le k\le n,\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|\le\frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2}=\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.$$

De plus, d'après la question 10.a, on a :

$$\left|\sum_{0\le k\le n,\left|x-\frac{k}{n}\right|\le\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|\le\sum_{0\le k\le n,\left|x-\frac{k}{n}\right|\le\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P\left(S_n=k\right)\le\sum_{0\le k\le n,\left|x-\frac{k}{n}\right|\le\alpha}\varepsilon P\left(S_n=k\right).$$

Et :

$$\sum_{0\le k\le n,\left|x-\frac{k}{n}\right|\le\alpha}\varepsilon P\left(S_n=k\right)=\varepsilon\sum_{0\le k\le n,\left|x-\frac{k}{n}\right|\le\alpha}P\left(S_n=k\right)\le\varepsilon\sum_{0\le k\le n}P\left(S_n=k\right)=\varepsilon.$$

Donc :

$$\left|\sum_{0\le k\le n,\left|x-\frac{k}{n}\right|\le\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|\le\varepsilon.$$

Ainsi :

$$\left|B_n(f)(x)-f(x)\right|\le\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}+\varepsilon.$$

Enfin, si $n\ge\frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2\varepsilon}$, on a $\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}\le\varepsilon$, et :

$$\left|B_n(f)(x)-f(x)\right|\le 2\varepsilon.$$

Ainsi, il existe un entier naturel $n_0=E\left(\frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2\varepsilon}\right)+1$ tel que :

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n\ge n_0 \text{ et tout réel } x\in[0,1], \text{ on a } \left|B_n(f)(x)-f(x)\right|\le 2\varepsilon.}$$

Avec $\left\|B_n(f)-f\right\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}\left|B_n(f)(x)-f(x)\right|$, nous venons de prouver que :

$$\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_0\in\mathbb{N},\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ n\ge n_0\Rightarrow\left\|B_n(f)-f\right\|_\infty\le 2\varepsilon.$$

Autrement dit, nous venons de prouver que la suite $\left(B_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction *f* sur $[0,1]$. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $B_n(f)$ est une fonction polynômiale.

Ceci prouve le théorème de Weierstrass :

$$\boxed{\text{La fonction continue } f \text{ est limite uniforme sur } [0,1] \text{ d'une suite de fonctions polynômiales.}}$$