DS de Mathématiques n° 2

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 6 pages.

Problème 1

Dans tout le problème, on pose $I = \left]-1,+\infty\right[$ et on considère la fonction $\sigma : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$.

I – Préliminaires

Q1. Déterminer le domaine de définition de σ, puis prouver que σ est continue sur celui-ci.

Q2. Montrer que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi} t \leq \sin t \leq t$.

Q3. Soit h une fonction continue et positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Prouver que la fonction $\varepsilon \mapsto \int_\varepsilon^{\pi/2} h(t)\,dt$ admet une limite finie en 0^+ si et seulement si elle est majorée sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On note alors $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{\pi/2} h(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} h(t)\,dt$, et on admet que l'on peut utiliser les propriétés usuelles de l'intégrale sur un segment (linéarité, croissance, …) avec l'intégrale sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Q4. Dans les trois cas suivants, montrer que $\varepsilon \mapsto \int_\varepsilon^{\pi/2} h(t)\,dt$ admet une limite finie en 0^+ :

a. $h(t) = \left(\ln(\sin t)\right)^2$.

b. $h(t) = \left|\ln(\sin t)\right|$.

☺ *On pourra utiliser la question* a *et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

c. $h(t) = (\sin t)^x$ avec $x \in I$.

Dans la suite, on pose pour tout $x \in I$, $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x\,dt$ et on se propose d'étudier certaines propriétés de *f*.

II – Calcul de σ(1)

Q5. Exhiber deux nombres réels α et β tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\pi} \left(\alpha t^2 + \beta t\right) \cos(nt)\, dt = \frac{1}{n^2}.$$

Q6. Vérifier que si $t \in \left]0, \pi\right]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

Q7. Justifier que, si φ est une application de classe C^1 de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin(xt)\, dt = 0.$$

Q8. En déduire que $\sigma(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

III – Équivalents

Q9. Montrer que pour tout $x \in I$, $(x+1) f(x) = (x+2) f(x+2)$.

Q10. Prouver que *f* est strictement positive et décroissante sur *I*.

Q11. Soit $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Prouver que pour tous $x_0, x \in \mathbb{R}_+$, $\left|(\sin t)^x - (\sin t)^{x_0}\right| \leq |x - x_0| \left|\ln(\sin t)\right|$ et en déduire que *f* est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Q12. Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque *x* tend vers − 1.

Q13. Montrer que pour tout entier naturel *n* :

$$f(n) f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Q14. En déduire que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

IV – Convergence de suite de fonctions

On considère deux nombres réels strictement positifs *a* et *b*, et on pose $\rho = \dfrac{b-a}{b+a}$.

On appelle Ψ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Psi(x) = \ln\left(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x\right).$$

Q15. Montrer que Ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\Psi'(x)=4\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\sin(2kx).$$

Q16. En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\Psi(x)=2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)-2\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\frac{\cos(2kx)}{k}.$$

☺ *On admettra que pour tout* $t\in\left]-1,1\right[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^k}{k}=-\ln(1-t)$.

Q17. Prouver que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\frac{\cos(2kx)}{k}\right)^2=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\rho^{k+2}\sum_{j=0}^{k}\frac{\cos\big(2(k+2)x\big)+\cos\big(2(2j-k)x\big)}{2(j+1)(k+1-j)}\right).$$

Puis que :

$$\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\frac{\cos(2kx)}{k}\right)^2dx=\frac{\pi}{2}\sigma(\rho^2).$$

Q18. Montrer alors que :

$$\int_0^{\pi}\Psi(x)^2dx=4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2+2\pi\sigma(\rho^2).$$

Puis que :

$$\int_0^{\pi/2}\Psi(x)^2dx=2\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2+\pi\sigma(\rho^2).$$

On définit les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n=\frac{1}{n+1}\ \text{ et }\ b_n=\frac{n}{n+1}.$$

Q19. Soit la suite d'applications $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right],\ \Psi_n(t)=\ln\left(a_n^2\cos^2 t+b_n^2\sin^2 t\right).$$

Établir la convergence simple de la suite $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. La convergence est-elle uniforme ?

On notera φ la limite simple de $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Q20. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $\alpha_n=\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$.

a. Prouver que pour tout $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\Psi_n(t)\le 0$ et $\varphi(t)\le 0$.

b. En déduire que $\Psi_n(t)^2 - \varphi(t)^2$ est du signe opposé à celui de $a_n^2\cos^2 t + (b_n^2 - 1)\sin^2 t$, puis que :

$$\Psi_n(t)^2 - \varphi(t)^2 \leq 0 \text{ quand } t \in \left]0, \alpha_n\right]$$

$$\Psi_n(t)^2 - \varphi(t)^2 \geq 0 \text{ quand } t \in \left[\alpha_n, \frac{\pi}{2}\right]$$

Q21. Prouver alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2\,dx = \int_0^{\pi/2} \varphi(x)^2\,dx\,.$$

En déduire que :

$$\int_0^{\pi/2} \varphi(x)^2\,dx = 2\pi\left(\ln 2\right)^2 + \pi\sigma(1)\,.$$

Remarque : Dans le problème d'origine, cette partie permettait de calculer $f''(0)$.

Problème 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $E_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B} = \left(E_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de E_n. On rappelle que pour tous $r,t,u,v \in [\![1,n]\!]$:

$$E_{r,t}E_{u,v} = \begin{cases} 0_n & \text{quand } t \neq u \\ E_{r,v} & \text{quand } t = u \end{cases} = \delta_{t,u}E_{r,v}$$

où $\delta_{t,u}$ est le symbole de Kronecker.

Pour $M = (m_{i,j}) \in E_n$, on notera dans tout l'exercice, $M^\top$ la transposée de M.

On dira qu'une matrice M de E_n est <u>*nilpotente*</u> s'il existe un entier naturel non nul r tel que $M^r = 0_n$.

Par exemple, la matrice $E_{1,2}$ de $\mathcal{B}$ est nilpotente car $E_{1,2}^2 = 0_n$.

On dira qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ (assimilé à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) est <u>*stable pour une matrice A*</u> de E_n si, pour tout $X \in V$, on a $AX \in V$.

Dans tout le problème, H est un hyperplan de E_n.

Partie I

On veut montrer que H contient au moins une matrice inversible de E_n.

Q22. Soit T une matrice n'appartenant pas à H. Justifier que l'on a $E_n = H \oplus \mathrm{Vect}(T)$.

Q23. Déterminer les matrices nilpotentes de la base canonique.

Q24. On pose $U = \sum\limits_{1\leq i<j\leq n}^{n} (E_{i,j} + E_{j,i})$.

Montrer que U est inversible et donner son inverse en fonction de U.

Q25. On suppose que H ne contient pas de matrice inversible.

Soit N une matrice nilpotente.

a. Justifier qu'il existe une matrice A de H et un réel α tels que $N = A + \alpha I_n$.
b. Montrer alors qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $A\,Q(A) = \alpha^p I_n$.
c. En déduire que $N \in H$.

Q26. Montrer alors que H contient au moins une matrice inversible de E_n.

Partie II

Dans cette partie et la suivante, on suppose que H est stable par multiplication, autrement dit que pour toutes matrices M et N de H, la matrice MN est encore dans H.

On se propose de prouver que $I_n \in H$. On raisonne par l'absurde en supposant que $I_n \notin H$.

Q27. On note p la projection sur $\mathrm{Vect}(I_n)$ parallèlement à H.

Prouver que pour toutes matrices M, N de E_n, on a $p(MN) = p(M)\,p(N)$.

Q28. Démontrer que : $M^2 \in H \quad \Rightarrow \quad M \in H$.

Q29. Prouver alors que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $E_{i,j} \in H$.

Q30. Conclure.

Partie III

Dans cette partie, on se propose de prouver que $n = 2$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit quand $n \geq 3$.

Pour toute matrice $M = (m_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$, ce réel est appelé la <u>*trace*</u> de M.

Q31. On prend ici $n = 2$. Exhiber un hyperplan de E_2 stable par multiplication de matrices.

Q32. Prouver que pour toutes matrices A, B de E_n, on a :

- $tr(\lambda A + B) = \lambda\, tr(A) + tr(B)$ pour tout réel λ ;
- $tr(AB) = tr(BA)$.

On admet dans la suite que l'application qui à tout couple (A, B) de E_n associe $(A \mid B) = tr(A^{\mathsf{T}} B)$ définit un produit scalaire sur E_n (c'est le produit scalaire canonique, pour lequel la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée). Ce produit scalaire munit E_n d'une structure d'espace euclidien.

Soit A un élément non nul de $H^{\perp}$, l'orthogonal de H (H est toujours un hyperplan de E_n stable par produit matriciel) pour le produit scalaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donné ci-dessus.

Q33. Rappelez la formule liant $\dim H^{\perp}$ et $\dim H$ (on ne demande pas de preuve) et en déduire la dimension de $H^{\perp}$.

Q34. Montrer que pour toute matrice B de H, BA^{T} est proportionnelle à A^{T}.

Q35. Montrer que A^{T} n'est pas inversible.

Q36. Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $W = \mathrm{Im}(A^{\mathsf{T}})$ est stable pour *B*, quel que soit *B* dans *H* (*W* est stable pour tous les éléments de *H*).

On pose $p = rg(A^{\mathsf{T}})$ et on considère $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $W = \mathrm{Im}(A^{\mathsf{T}})$, complétée en une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On appelle *P* la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}_1$.

Q37. Montrer que l'application $\varphi_P : E_n \to E_n$; $M \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme de E_n.

Q38. En déduire que l'on a :

$$\dim H \leq n^2 - p(n-p).$$

Q39. Conclure.

- FIN DU SUJET -