DM de Mathématiques n° 4

Extrait de CCP - MP - 2015

Exemple via un théorème de Dini

1) *Question préliminaire*

   Soit $x \in [0,1]$. On note $I =]-\infty, \sqrt{x}]$ et on pose, pour tout $t \in I$, $g_x(t) = t + \frac{1}{2}(x - t^2)$.

   On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

   $$u_{n+1} = g_x(u_n) = u_n + \frac{1}{2}(x - u_n^2) .$$

   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite en fonction du réel x.

2) Proposer un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement mais pas uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f continue sur $[a,b]$. On pourra s'appuyer sur une représentation graphique précise et propre sans nécessairement donner f_n sous forme analytique.

Pour traiter la suite de cette partie, on admettra le résultat suivant.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement vers une fonction f, elle-même continue sur $[a,b]$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est-à-dire si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [a,b]$, $f_n(t) \le f_{n+1}(t)$, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

3) *Application* : Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie par $P_0(x) = 0$ et :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n(x)^2\right).$$

   a. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est une fonction polynômiale.

   b. Justifier que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$.

   c. Démontrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers h.

Démonstration du théorème de Weierstrass

On se propose de donner dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[0,1]$.

Dans toute cette partie, f est une fonction continue sur $[0,1]$ et à valeurs réelles.

Soient n est un entier naturel non nul et $x \in [0,1]$. On pose :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{(polynôme de Bernstein).}$$

4) Soit S_n une variable aléatoire réelle suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$.

a. Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, on a :

$$P\left(\left|S_n - nx\right| \geq n\alpha\right) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

b. Soit la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie :

$$E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x).$$

5) Soit un réel $\varepsilon > 0$. On admet qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$:

$$|a-b| \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(a) - f(b)| \leq \varepsilon.$$

a. Majorer $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$ pour tout entier k compris entre 0 et n, et vérifiant $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$.

b. Justifier que :

$$\left|\sum_{0 \leq k \leq n,\, \left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P\left(S_n = k\right)\right| \leq 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).$$

c. Prouver qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout réel $x \in [0,1]$, on a $\left|B_n(f)(x) - f(x)\right| \leq 2\varepsilon$, puis conclure.