Corrigé du DS n° 2

Problème 1

Extrait très adapté de : Mines-Ponts 2023 – MP-MPI – Mathématiques 2

I – Préliminaires

Q1. Soit $x\in\mathbb{R}$.

- Si $|x|>1$, alors par croissances comparées, $\lim\limits_{k\to+\infty}\left|\dfrac{x^k}{k^2}\right|=+\infty$, donc la série $\sum\dfrac{x^k}{k^2}$ diverge grossièrement.
- Si $|x|\leq 1$, alors pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{x^k}{k^2}\right|\leq\dfrac{1}{k^2}$. Alors, par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum\dfrac{1}{k^2}$, la série $\sum\dfrac{x^k}{k^2}$ converge absolument, donc converge.

Ainsi, $\sum\dfrac{x^k}{k^2}$ si et seulement si $|x|\leq 1$, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } \sigma \text{ est définie sur } [-1,1].}$$

Notons $\sigma_k : x\mapsto\dfrac{x^k}{k^2}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. On a $\sup\limits_{x\in[-1,1]}|\sigma_k(x)|=\dfrac{1}{k^2}$ et la série $\sum\dfrac{1}{k^2}$ converge, donc la série de fonctions $\sum\sigma_k$ converge normalement sur $[-1,1]$. Comme les fonctions σ_k sont continues (car polynomiales) sur $[-1,1]$:

$$\boxed{\text{La fonction } \sigma=\sum_{k=1}^{+\infty}\sigma_k \text{ est continue sur } [-1,1].}$$

Q2. On a $|\sin t|\leq|t|$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Or, pour tout $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin t\geq 0$ et $t\geq 0$, donc $\sin t\leq t$.

Par ailleurs, la fonction $g : t\mapsto\sin t-\dfrac{2}{\pi}t$ est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ comme différence de telles fonctions, de dérivée $g' : t\mapsto\cos t-\dfrac{2}{\pi}=\cos t-\cos\alpha$ avec $\alpha=\arccos\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$.

Comme $\dfrac{2}{\pi}\in\left]0,1\right[$, α est bien défini et appartient $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Par décroissance de la fonction cosinus sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a :

- sur $[0,\alpha]$, $g'(t)\geq 0$, donc g est croissante, ce qui permet d'écrire $g(t)\geq g(0)=0$;
- sur $\left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right]$, $g'(t)\leq 0$, donc g est décroissante, ce qui permet d'écrire $g(t)\geq g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Ainsi, $g(t)\geq 0$, soit $\sin t\geq \frac{2}{\pi}t$, sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et finalement, on a bien pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\boxed{\frac{2}{\pi}t\leq \sin t\leq t}$$

Q3. Comme h est continue et positive sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $H:\varepsilon\mapsto\int_{\varepsilon}^{\pi/2}h(t)\,dt$ est définie et décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. Le théorème de la limite monotone permet alors de conclure que :

$$\boxed{\varepsilon\mapsto\int_{\varepsilon}^{\pi/2}h(t)\,dt \text{ admet une limite finie en } 0^+ \text{ si et seulement si elle est majorée sur } \left]0,\frac{\pi}{2}\right].}$$

Q4. a. On prend ici $h(t)=\left(\ln(\sin t)\right)^2$.

La fonction h vérifie bien les hypothèses de la question précédente.

D'après la question **Q2**, on a pour tout $t\in\,]0,1]\subset\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$:

$$0<\frac{2}{\pi}t\leq\sin t\leq t \quad\Leftrightarrow\quad \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)+\ln t\leq\ln(\sin t)\leq\ln t\leq 0.$$

Donc $\left(\ln(\sin t)\right)^2\leq\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)+\ln t\right)^2$, et pour tout $\varepsilon\in\,]0,1]$:

$$\int_{\varepsilon}^{1}\left(\ln(\sin t)\right)^2 dt\leq\int_{\varepsilon}^{1}\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)+\ln t\right)^2 dt.$$

En intégrant par parties deux fois de suite, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{1}\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)+\ln t\right)^2 dt &= \left[\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)+\ln t\right)^2 t\right]_{\varepsilon}^{1}-\int_{\varepsilon}^{1}2\frac{1}{t}\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)+\ln t\right)t\,dt\\
&=\left[\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)+\ln t\right)^2 t\right]_{\varepsilon}^{1}-2\int_{\varepsilon}^{1}\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)+\ln t\right)dt\\
&=\left[\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)+\ln t\right)^2 t\right]_{\varepsilon}^{1}-2\left[\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)+\ln t\right)t\right]_{\varepsilon}^{1}+2\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{t}t\,dt
\end{aligned}$$

Soit :

$$\int_\varepsilon^1\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)+\ln t\right)^2 dt=\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)\right)^2-\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon}\left(\ln\varepsilon\right)\right)^2$$
$$-2\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)+2\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)\varepsilon+\varepsilon\ln\varepsilon\right)+2(1-\varepsilon)$$

Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\varepsilon}\left(\ln\varepsilon\right)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon=0$, donc la limite en 0^+ de l'expression ci-dessus est finie, ce qui veut dire que $\varepsilon\mapsto\int_\varepsilon^1\left(\ln(\sin t)\right)^2 dt$ est majorée sur $\left]0,1\right]$ et donc $\varepsilon\mapsto\int_\varepsilon^{\pi/2}\left(\ln(\sin t)\right)^2 dt=\int_\varepsilon^1\left(\ln(\sin t)\right)^2 dt+\int_1^{\pi/2}\left(\ln(\sin t)\right)^2 dt$ est majorée sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. La question précédente permet donc de conclure que :

$$\boxed{\varepsilon\mapsto\int_\varepsilon^{\pi/2}\left(\ln(\sin t)\right)^2 dt\ \text{ admet une limite finie en } 0^+.}$$

b. On prend ici $h(t)=\left(\ln(\sin t)\right)^2$.

La fonction h vérifie bien les hypothèses de la question précédente.

Les fonctions $t\mapsto\left|\ln(\sin t)\right|$ et $t\mapsto 1$ sont continues sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, donc pour tout $\varepsilon\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire :

$$\int_\varepsilon^{\pi/2}\left|\ln(\sin t)\right|dt=\int_\varepsilon^{\pi/2}\left(\left|\ln(\sin t)\right|\times 1\right)dt\le\sqrt{\left(\int_\varepsilon^{\pi/2}\left(\ln(\sin t)\right)^2 dt\right)\left(\int_\varepsilon^{\pi/2}1^2 dt\right)}.$$

Or, $\int_\varepsilon^{\pi/2}1^2 dt=\frac{\pi}{2}-\varepsilon\le\frac{\pi}{2}$ et on vient de voir que la fonction $\varepsilon\mapsto\int_\varepsilon^{\pi/2}\left(\ln(\sin t)\right)^2 dt$ est majorée sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, ainsi, la fonction $\varepsilon\mapsto\int_\varepsilon^{\pi/2}\left|\ln(\sin t)\right|dt$ est elle aussi majorée sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et donc, à nouveau grâce à la question précédente :

$$\boxed{\varepsilon\mapsto\int_\varepsilon^{\pi/2}\left|\ln(\sin t)\right|dt\ \text{ admet une limite finie en } 0^+.}$$

c. On prend ici $h(t)=\left(\sin t\right)^x$ avec $x\in I=\left]-1,+\infty\right[$ fixé.

La fonction h vérifie bien les hypothèses de la question précédente.

On a $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, donc la fonction $t\mapsto\frac{\sin t}{t}$, continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, se prolonge en une fonction continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Cette fonction, ainsi prolongée, est continue sur le segment

$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes. Comme elle est strictement positive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, il en va de même de la fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin t}{t}\right)^x$.

Ainsi, il existe un réel M tel que pour tout $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$:

$$0 < \left(\frac{\sin t}{t}\right)^x \leq M .$$

Alors, pour tout $\varepsilon \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a, avec $(\sin t)^x = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^x t^x$:

$$0 \leq \int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^x \, dt = \int_\varepsilon^{\pi/2} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^x t^x dt \leq \int_\varepsilon^{\pi/2} \alpha t^x dt = \frac{M}{x+1}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{x+1} - \varepsilon^{x+1}\right) \leq \frac{M}{x+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{x+1} .$$

Ainsi, la fonction $\varepsilon \mapsto \int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^x \, dt$ est elle aussi majorée sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et donc, toujours grâce à la question précédente, on peut conclure que :

$$\boxed{\varepsilon \mapsto \int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^x \, dt \text{ admet une limite finie en } 0^+ .}$$

II – Calcul de σ(1)

Q5. Pour tous réels α et β, on obtient après deux intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\alpha t^2 + \beta t\right)\cos(nt)\, dt &= \left[\left(\alpha t^2 + \beta t\right)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (2\alpha t + \beta)\frac{\sin(nt)}{n} dt \\
&= \left[\left(\alpha t^2 + \beta t\right)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi + \left[(2\alpha t + \beta)\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2\alpha\frac{\cos(nt)}{n^2} dt \\
&= \left[\left(\alpha t^2 + \beta t\right)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi + \left[(2\alpha t + \beta)\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi - \left[2\alpha\frac{\sin(nt)}{n^3}\right]_0^\pi \\
&= (2\alpha\pi + \beta)\frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \beta\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Alors, en posant $2\alpha\pi + \beta = 0$ et $-\beta = 1$, on a $\int_0^\pi \left(\alpha t^2 + \beta t\right)\cos(nt)\, dt = \frac{1}{n^2}$.

Finalement :

$$\boxed{\int_0^\pi \left(\alpha t^2 + \beta t\right)\cos(nt)\, dt = \frac{1}{n^2} \text{ pour } \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2\pi} \\ \beta = -1 \end{cases}}$$

Q6. Soient $t \in \left]0,\pi\right]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a $e^{it} \neq 1$ et :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} (e^{it})^k\right) = \mathrm{Re}\left(e^{it}\,\frac{(e^{it})^n - 1}{e^{it} - 1}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{it}\,\frac{e^{i\frac{nt}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}}\,\frac{e^{i\frac{nt}{2}} - e^{-i\frac{nt}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{(n+1)t}{2}}\,\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) = \frac{\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2} + \frac{nt}{2}\right) - \sin\left(\frac{(n+1)t}{2} - \frac{nt}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Et ainsi, on a bien :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}}$$

Q7. Soit φ est une application de classe C^1 de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$.

En intégrant par parties, on a pour tout réel $x > 0$:

$$\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)\,dt = \left[-\varphi(t)\frac{\cos(xt)}{x}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \varphi'(t)\frac{\cos(xt)}{x}\,dt$$

$$= \frac{\varphi(0) - \varphi(\pi)\cos(x\pi)}{x} + \frac{1}{x}\int_0^{\pi} \varphi'(t)\cos(xt)\,dt$$

Et :

$$\left|\frac{\varphi(0) - \varphi(\pi)\cos(x\pi)}{x}\right| \leq \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)||\cos(x\pi)|}{x} \leq \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)|}{x}$$

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^{\pi} \varphi'(t)\cos(xt)\,dt\right| \leq \frac{1}{x}\int_0^{\pi} |\varphi'(t)\cos(xt)|\,dt \leq \frac{1}{x}\int_0^{\pi} |\varphi'(t)|\,dt$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)|}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{\pi} |\varphi'(t)|\,dt = 0$, le théorème des gendarmes donne :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(0) - \varphi(\pi)\cos(x\pi)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\int_0^{\pi} \varphi'(t)\cos(xt)\,dt = 0.$$

Et donc :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)\,dt = 0}$$

Q8. D'après la question **Q5**, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right)dt=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)\cos(kt)\,dt=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

Et d'après la question **Q6**, on a pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\left]0,\pi\right]$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)\cos(kt)&=\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)\\&=\left(\frac{1}{2\pi}t-1\right)\frac{t/2}{\sin(t/2)}\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)\end{aligned}$$

Posons alors pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $h(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{\sin t} & \text{quand } t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\\ 1 & \text{quand } t=0\end{cases}$ et pour tout $t\in[0,\pi]$:

$$\varphi(t)=\left(\frac{1}{2\pi}t-1\right)h\left(\frac{t}{2}\right).$$

On a donc pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\left]0,\pi\right]$:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)\cos(kt)=\varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right).$$

Et la relation reste vraie pour $t=0$ (elle donne 0 = 0).

La fonction h est de classe C^1 sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ en tant que quotient de telles fonctions avec pour tout $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $h'(t)=\dfrac{\sin t-t\cos t}{\sin^2 t}$.

On a $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$, donc h est continue en 0 et :

$$h'(t)=\frac{t+\underset{t\to0}{o}(t^2)-t\left(1+\underset{t\to0}{o}(t)\right)}{t^2+\underset{t\to0}{o}(t^2)}=\frac{\underset{t\to0}{o}(t^2)}{t^2+\underset{t\to0}{o}(t^2)}=\frac{\underset{t\to0}{o}(1)}{1+\underset{t\to0}{o}(1)}.$$

On a alors $\lim\limits_{t\to0}h'(t)=0$, cette limite étant finie, on a réuni toutes les hypothèses permettant de conclure que h est de classe C^1 en 0 (avec $h'(0)=0$). Ainsi, h est de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donc φ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$ comme produit de telles fonctions.

Il est alors légitime d'écrire pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^{\pi}\left[\varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)\right]dt.$$

Soit :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)dt$$
$$=\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6\pi}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\pi}$$
$$=\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt+\frac{\pi^2}{6}$$

Comme $\frac{2n+1}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, la question **Q7** donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt=0$ et ainsi :

$$\boxed{\sigma(1)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

III – Équivalents

Q9. Soit $x\in I$. On a alors $x+2\in I$.

Une intégration par parties donne pour tout $\varepsilon\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/2}(\sin t)^{x+2}\,dt=\int_{\varepsilon}^{\pi/2}\sin t(\sin t)^{x+1}\,dt=\left[-\cos t(\sin t)^{x+1}\right]_{\varepsilon}^{\pi/2}+\int_{\varepsilon}^{\pi/2}(x+1)\cos^2 t(\sin t)^{x}\,dt$$
$$=\cos\varepsilon(\sin\varepsilon)^{x+1}+(x+1)\left(\int_{\varepsilon}^{\pi/2}(\sin t)^{x}\,dt-\int_{\varepsilon}^{\pi/2}(\sin t)^{x+2}\,dt\right)$$

Comme $x\in I$, on a $x>-1$, donc $x+1>0$ et $\cos\varepsilon(\sin\varepsilon)^{x+1}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$ et, en passant à la limite en 0 dans la relation ci-dessus, on obtient $f(x+2)=(x+1)\big(f(x)-f(x+2)\big)$, ce qui donne :

$$\boxed{(x+1)f(x)=(x+2)f(x+2)}$$

Q10. Soit $x\in I$.

Pour tout $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t>0$, donc $(\sin t)^x>0$. Alors, $f(x)\geq 0$ (on a admis que l'on pouvait utiliser la positivité de l'intégrale en intégrant de 0 à $\frac{\pi}{2}$).

De plus, pour tout $\varepsilon\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $0\leq\int_{\varepsilon}^{\pi/2}(\sin t)^x\,dt\leq f(x)$, donc si $f(x)=0$, on aurait $\int_{\varepsilon}^{\pi/2}(\sin t)^x\,dt=0$ pour tout $\varepsilon\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, soit $\sin t=0$ pour tout $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Ceci est absurde, donc $f(x)\neq 0$ et ainsi, $f(x)>0$.

Soient maintenant $a,b \in I$ tels que $a \leq b$.

Pour tout $t \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 < \sin t \leq 1$, donc $\ln(\sin t) \leq 0$. Alors, $a\ln(\sin t) \geq b\ln(\sin t)$, soit $(\sin t)^a \geq (\sin t)^b$ et par croissance de l'intégrale (admise en intégrant de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$), on obtient :

$$f(a) \geq f(b).$$

Ceci prouve que *f* est décroissante.

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien strictement positive et décroissante sur } I.}$$

Q11. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}_-$, donc d'après le théorème des accroissements finis, pour tous $a,b \in \mathbb{R}_-$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $\left|e^a - e^b\right| = e^c\,|a-b|$.

Comme $c \leq 0$, on a $e^c \leq 1$, et ainsi, pour tous $a,b \in \mathbb{R}_-$, $\left|e^a - e^b\right| = |a-b|$.

Soient maintenant $t \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $x_0, x \in \mathbb{R}_+$. On a $x_0 \ln(\sin t) \leq 0$ et $x\ln(\sin t) \leq 0$, donc :

$$\left|e^{x\ln(\sin t)} - e^{x_0\ln(\sin t)}\right| = \left|x\ln(\sin t) - x_0\ln(\sin t)\right|.$$

Soit :

$$\boxed{\left|(\sin t)^x - (\sin t)^{x_0}\right| \leq |x - x_0|\left|\ln(\sin t)\right|}$$

Alors, pour tous $x_0, x \in \mathbb{R}_+$, on a (en utilisant les propriétés usuelles de l'intégrale pour les intégrales entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$) :

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x\,dt - \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{x_0}\,dt\right| = \left|\int_0^{\pi/2} \left[(\sin t)^x - (\sin t)^{x_0}\right]dt\right|.$$

Comme $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{\pi/2} \left|\ln(\sin t)\right| dt$ est finie d'après **Q4**.b, on peut écrire :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \int_0^{\pi/2} \left|(\sin t)^x - (\sin t)^{x_0}\right| dt \leq \int_0^{\pi/2} |x - x_0|\left|\ln(\sin t)\right| dt.$$

Soit :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \int_0^{\pi/2} \left|\ln(\sin t)\right| dt.$$

Et comme $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left|\ln(\sin t)\right| dt$ est une constante, ceci prouve que *f* est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ et donc que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

Q12. Par continuité de f en 1, on a :

$$\lim_{x\to -1}(x+2)f(x+2)=1\times f(1)=\int_0^{\pi/2}\sin t\,dt=1.$$

Avec la question **Q9**, ceci prouve que $\lim_{x\to -1}(x+1)f(x)=1$ et donc que :

$$\boxed{f(x)\underset{x\to -1}{\sim}\frac{1}{x+1}}$$

Q13. On a vu que pour tout $x\in I$, $(x+1)f(x)=(x+2)f(x+2)$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}\subset I$:

$$(n+1)f(n)=(n+2)f(n+2).$$

Soit :

$$(n+1)f(n)f(n+1)=(n+2)f(n+1)f(n+2).$$

Ceci prouve que la suite $\big((n+1)f(n)f(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, donc que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$(n+1)f(n)f(n+1)=f(0)f(1).$$

On a vu que $f(1)=1$ et $f(0)=\int_0^{\pi/2}dt=\frac{\pi}{2}$, ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+1)f(n)f(n+1)=\frac{\pi}{2}$, soit :

$$\boxed{f(n)f(n+1)=\frac{\pi}{2(n+1)}}$$

Q14. Soit un réel $x>1$. On a alors $x-1, x, x+1, \lfloor x\rfloor-1, \lfloor x\rfloor, \lfloor x\rfloor+1, \lfloor x\rfloor+2\in I$ et comme f est décroissante et positive, on peut écrire :

$$f\big(\lfloor x\rfloor+1\big)f\big(\lfloor x\rfloor+2\big)\leq f(x)f(x+1)\leq f(x)^2\leq f(x)f(x-1)\leq f\big(\lfloor x\rfloor\big)f\big(\lfloor x\rfloor-1\big).$$

Avec la question précédente, on a avec $\lfloor x\rfloor-1, \lfloor x\rfloor+1\in\mathbb{N}$:

$$\frac{\pi}{2\big(\lfloor x\rfloor+2\big)}\leq f(x)^2\leq\frac{\pi}{2\lfloor x\rfloor}.$$

Et toujours avec f positive, on obtient pour tout réel $x>1$:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sqrt{\frac{x}{\lfloor x\rfloor+2}}\leq f(x)\leq\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sqrt{\frac{x}{\lfloor x\rfloor}}.$$

Or, comme $\lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$, on a $\lfloor x\rfloor+2\underset{x\to+\infty}{\sim}\lfloor x\rfloor\underset{x\to+\infty}{\sim}x$, on a :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sqrt{\frac{x}{\lfloor x\rfloor+2}}\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sqrt{\frac{x}{\lfloor x\rfloor}}\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

Avec le théorème des gendarmes appliqué aux équivalents, on obtient :

$$\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}}$$

IV – Convergence de suite de fonctions

Remarquons préalablement que comme a et b sont strictement positifs, on a $-b-a<b-a<b+a$, et donc :

$$\underline{-1<\rho<1.}$$

Q15. Comme composée de $x\mapsto a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x$, de classe C^1 et strictement positive sur $\mathbb{R}$, par la fonction ln de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\text{La fonction } \Psi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

On a de plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\Psi'(x)&=\frac{-2a^2\sin x\cos x+2b^2\cos x\sin x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\\&=\frac{2(b^2-a^2)\sin(2x)}{a^2\left(1+\cos(2x)\right)+b^2\left(1-\cos(2x)\right)}\\&=\frac{2(b^2-a^2)\sin(2x)}{a^2+b^2-(b^2-a^2)\cos(2x)}\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $|\rho|<1$, la série géométrique $\sum\rho^k e^{i2kx}$, de raison ρe^{i2x}, converge pour tout $x\in\mathbb{R}$, car $\left|\rho e^{i2x}\right|<1$. La série $\sum\rho^k\sin(2kx)$ converge alors, avec :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\sin(2kx)=\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}(\rho e^{i2x})^k\right).$$

On a, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\rho e^{i2x})^k=\frac{\rho e^{i2x}}{1-\rho e^{i2x}}=\frac{\rho e^{i2x}(1-\rho e^{-i2x})}{(1-\rho e^{i2x})(1-\rho e^{-i2x})}=\frac{\rho\cos(2x)-\rho^2+i\rho\sin(2x)}{1+\rho^2-2\rho\cos(2x)}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}4\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\sin(2kx)&=\frac{4\rho\sin(2x)}{1+\rho^2-2\rho\cos(2x)}=\frac{4\dfrac{b-a}{b+a}\sin(2x)}{1+\left(\dfrac{b-a}{b+a}\right)^2-2\dfrac{b-a}{b+a}\cos(2x)}\\&=\frac{4(b^2-a^2)\sin(2x)}{(b+a)^2+(b-a)^2-2(b^2-a^2)\cos(2x)}\\&=\frac{2(b^2-a^2)\sin(2x)}{(b^2+a^2)-(b^2-a^2)\cos(2x)}\end{aligned}.$$

On a donc bien pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{\Psi'(x)=4\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\sin(2kx)}$$

Q16. Comme Ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on a, avec la question précédente, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\Psi(x)=\Psi(0)+\int_0^x \Psi'(t)\,dt=\Psi(0)+4\int_0^x\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\sin(2kt)\right)dt\,.$$

Or, pour tout $k\in\mathbb{N}$, si on note $\phi_k : x\mapsto \rho^k\sin(2kx)$, on a $\sup_{\mathbb{R}}|\phi_k|=\rho^k$ et la série géométrique $\sum\rho^k$ converge (car $|\rho|<1$). Ainsi, la série de fonctions $\sum\phi_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et comme toutes les ϕ_k sont continues sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\Psi(x)&=\Psi(0)+4\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^x\left(\rho^k\sin(2kt)\right)dt=\Psi(0)+4\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\,\frac{1-\cos(2kx)}{2k}\\&=\Psi(0)+2\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k}{k}-\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\,\frac{\cos(2kx)}{k}\right)=\Psi(0)-2\ln(1-\rho)-2\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\,\frac{\cos(2kx)}{k}\end{aligned}$$

Enfin, $\Psi(0)=\ln\left(a^2\cos^2 0+b^2\sin^2 0\right)=2\ln a$, donc :

$$\begin{aligned}\Psi(x)&=2\ln a-2\ln(1-\rho)-2\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\,\frac{\cos(2kx)}{k}\\&=2\ln a-2\ln\left(1-\frac{b-a}{b+a}\right)-2\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\,\frac{\cos(2kx)}{k}\\&=2\ln a-2\ln\left(\frac{2a}{b+a}\right)-2\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\,\frac{\cos(2kx)}{k}\end{aligned}$$

Soit finalement pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{\Psi(x)=2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)-2\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\,\frac{\cos(2kx)}{k}}$$

Q17. Soit $x\in\mathbb{R}$. En réindexant, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\,\frac{\cos(2kx)}{k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\rho^{k+1}\,\frac{\cos\left(2(k+1)x\right)}{k+1}\,.$$

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\left|\rho^{k+1}\,\frac{\cos\left(2(k+1)x\right)}{k+1}\right|\le\rho^{k+1}$ et la série $\sum\rho^{k+1}$ converge. On peut donc appliquer la formule du produit de Cauchy :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\rho^{k+1}\,\frac{\cos\left(2(k+1)x\right)}{k+1}\right)^2&=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k}\left[\left(\rho^{j+1}\,\frac{\cos\left(2(j+1)x\right)}{j+1}\right)\left(\rho^{k-j+1}\,\frac{\cos\left(2(k-j+1)x\right)}{k-j+1}\right)\right]\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k}\left[\rho^{k+2}\,\frac{2\cos\left(2(j+1)x\right)\cos\left(2(k-j+1)x\right)}{2(j+1)(k-j+1)}\right]\end{aligned}$$

Avec la formule $2\cos a\cos b=\cos(a+b)+\cos(a-b)$, on obtient bien :

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\,\frac{\cos(2kx)}{k}\right)^2=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\rho^{k+2}\sum_{j=0}^{k}\frac{\cos\left(2(k+2)x\right)+\cos\left(2(2j-k)x\right)}{2(j+1)(k+1-j)}\right)}$$

Pour tous $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0,k]\!]$, on a $j+1 \geq 1$ et $k+1-j \geq 1$, donc :

$$\left|\rho^{k+2}\sum_{j=0}^{k}\frac{\cos\big(2(k+2)x\big)+\cos\big(2(2j-k)x\big)}{2(j+1)(k+1-j)}\right| \leq \rho^{k+2}\sum_{j=0}^{k}\frac{\left|\cos\big(2(k+2)x\big)\right|+\left|\cos\big(2(2j-k)x\big)\right|}{2(j+1)(k+1-j)}$$

$$\leq \rho^{k+2}\sum_{j=0}^{k}1=(k+1)\rho^{k+2}$$

Par croissances comparées, $(k+1)\rho^{k+2} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ et la série $\sum \dfrac{1}{k^2}$ converge, donc par comparaison, la série $\sum (k+1)\rho^{k+2}$ converge.

Ainsi, la série de fonctions continues $x \mapsto \rho^{k+2}\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\frac{\cos\big(2(k+2)x\big)+\cos\big(2(2j-k)x\big)}{2(j+1)(k+1-j)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et donc :

$$\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\,\frac{\cos(2kx)}{k}\right)^2 dx=\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\rho^{k+2}\sum_{j=0}^{k}\frac{\cos\big(2(k+2)x\big)+\cos\big(2(2j-k)x\big)}{2(j+1)(k+1-j)}\right)dx$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\left(\rho^{k+2}\sum_{j=0}^{k}\frac{\cos\big(2(k+2)x\big)+\cos\big(2(2j-k)x\big)}{2(j+1)(k+1-j)}\right)dx$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\rho^{k+2}\sum_{j=0}^{k}\frac{\int_0^{\pi}\cos\big(2(k+2)x\big)\,dx+\int_0^{\pi}\cos\big(2(2j-k)x\big)\,dx}{2(j+1)(k+1-j)}$$

Or, pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^{\pi}\cos(px)\,dx=\begin{cases}\left[\dfrac{\sin(px)}{p}\right]_0^{\pi}=0 & \text{quand } p=0\\[2mm] \pi & \text{quand } p=0\end{cases}$$

Donc :

$$\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\,\frac{\cos(2kx)}{k}\right)^2 dx=\sum_{\substack{k=0\\ k\ pair}}^{+\infty}\rho^{k+2}\,\frac{\pi}{2\left(\dfrac{k}{2}+1\right)\left(k+1-\dfrac{k}{2}\right)}=\sum_{\substack{k=0\\ k\ pair}}^{+\infty}\rho^{k+2}\,\frac{\pi}{2\left(\dfrac{k}{2}+1\right)^2}.$$

En réindexant, on obtient :

$$\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\,\frac{\cos(2kx)}{k}\right)^2 dx=\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\rho^{2(k+1)}}{(k+1)^2}=\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\rho^{2(k+1)}}{(k+1)^2}$$

Et en réindexant à nouveau, on obtient bien :

$$\boxed{\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\,\frac{\cos(2kx)}{k}\right)^2 dx=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\rho^2)^k}{k^2}=\frac{\pi}{2}\sigma(\rho^2)}$$

Q18. On a vu dans la question **Q16** que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\Psi(x)=2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)-2\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\frac{\cos(2kx)}{k}$.

Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(\Psi(x))^2&=\left(2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)-2\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\frac{\cos(2kx)}{k}\right)^2\\&=4\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2-8\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\frac{\cos(2kx)}{k}\right)+4\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\frac{\cos(2kx)}{k}\right)^2\end{aligned}$$

Comme plus haut, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $\left|\rho^k\frac{\cos(2kx)}{k}\right|\le\rho^k$ et la série $\sum\rho^k$ converge, donc la série de fonctions continues $x\mapsto\rho^k\frac{\cos(2kx)}{k}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et ainsi :

$$\int_0^\pi\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\frac{\cos(2kx)}{k}\right)dx=\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\frac{1}{k}\int_0^\pi\cos(2kx)dx=\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\frac{1}{k}\left[\frac{\sin(2kx)}{2k}\right]_0^\pi=0.$$

Ainsi, avec le résultat de la question précédente, on obtient bien :

$$\boxed{\int_0^\pi\Psi(x)^2dx=4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2+2\pi\sigma(\rho^2)}$$

Remarquons que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\Psi(\pi-x)=\ln\left(a^2\cos^2(\pi-x)+b^2\sin^2(\pi-x)\right)=\ln\left(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x\right)=\Psi(x).$$

Alors, en posant le changement de variable $t=\pi-x$, on a :

$$\int_{\pi/2}^\pi\Psi(x)^2dx=-\int_{\pi/2}^0\Psi(\pi-t)^2dt=\int_0^{\pi/2}\Psi(t)^2dt.$$

Ainsi, $\int_0^\pi\Psi(x)^2dx=\int_0^{\pi/2}\Psi(x)^2dx+\int_{\pi/2}^\pi\Psi(x)^2dx=2\int_0^{\pi/2}\Psi(x)^2dx$ et donc :

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\Psi(x)^2dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi\Psi(x)^2dx=2\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2+\pi\sigma(\rho^2)}$$

Q19. Remarquons déjà que pour tout $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $a_n^2\cos^2t+b_n^2\sin^2t>0$ (non nul car $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne s'annulent jamais et le cosinus et le sinus ne peuvent être nuls en même temps). Ainsi, Ψ_n est définie sur $\mathbb{R}$, donc sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

De plus, $a_n^2=\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $b_n^2=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$, donc pour tout $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $a_n^2\cos^2t+b_n^2\sin^2t\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sin^2t>0$ et $\Psi_n(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(\sin^2t)=2\ln(\sin t)$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement sur } \left]0,\frac{\pi}{2}\right] \text{ vers } \varphi : t \mapsto 2\ln(\sin t).}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{t\to 0} |\Psi_n(t) - \varphi(t)| = \lim\limits_{t\to 0} \left| \ln\left(a_n^2 \dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + b_n^2 \right) \right| = +\infty$, donc $\Psi_n - \varphi$ n'est pas bornée sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\text{La convergence de la suite } (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ n'est pas uniforme sur } \left]0,\frac{\pi}{2}\right].}$$

Q20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Pour tout $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 < a_n \le b_n$, donc :

$$a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t \le b_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t = b_n^2 < 1.$$

Ainsi, $\Psi_n(t) \le 0$ et comme $\sin^2 t \le 1$, on a aussi $\varphi(t) = \ln(\sin^2 t) \le 0$.

On a donc bien pour tout $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\boxed{\Psi_n(t) \le 0 \quad \text{et} \quad \varphi(t) \le 0}$$

b. Soit $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. On a :

$$\Psi_n(t)^2 - \varphi(t)^2 = \big(\Psi_n(t) - \varphi(t)\big)\big(\Psi_n(t) + \varphi(t)\big).$$

D'après la question précédente $\Psi_n(t) + \varphi(t) \le 0$, donc $\Psi_n(t)^2 - \varphi(t)^2$ et $\Psi_n(t) - \varphi(t)$ sont de signes opposés. Or :

$$\begin{aligned}
\Psi_n(t) - \varphi(t) \ge 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \Psi_n(t) \ge \varphi(t) \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\left(a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t\right) \ge \ln(\sin^2 t) \\
&\Leftrightarrow \quad a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t \ge \sin^2 t \\
&\Leftrightarrow \quad a_n^2 \cos^2 t + (b_n^2 - 1)\sin^2 t \ge 0
\end{aligned}$$

Donc, $\Psi_n(t) - \varphi(t)$ et $a_n^2 \cos^2 t + (b_n^2 - 1)\sin^2 t \ge 0$ sont de même signe et ainsi :

$$\boxed{\Psi_n(t)^2 - \varphi(t)^2 \text{ est du signe opposé à celui de } a_n^2 \cos^2 t + (b_n^2 - 1)\sin^2 t.}$$

Toujours pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\begin{aligned}
\Psi_n(t)^2 - \varphi(t)^2 \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_n^2 \cos^2 t + (b_n^2 - 1)\sin^2 t \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (1 - b_n^2)\sin^2 t \leq a_n^2 \cos^2 t \\
&\Leftrightarrow \quad \tan^2 t \leq \frac{a_n^2}{1 - b_n^2} = \frac{1}{2n+1} \\
&\Leftrightarrow \quad \tan t \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \qquad \left(\text{car } \tan t > 0 \text{ sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \\
&\Leftrightarrow \quad t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) = \alpha_n \\
&\Leftrightarrow \quad t \in \left]0, \alpha_n\right]
\end{aligned}$$

Comme on a raisonné par équivalence pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a bien :

$$\boxed{\begin{array}{l} \Psi_n(t)^2 - \varphi(t)^2 \leq 0 \ \text{ quand } t \in \left]0, \alpha_n\right] \\ \Psi_n(t)^2 - \varphi(t)^2 \geq 0 \ \text{ quand } t \in \left[\alpha_n, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{array}}$$

Q21. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Ψ_n est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 dx$ este bien définie. De plus, d'après la question **Q4**.b, $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\, dt = -\int_0^{\pi/2} \left|\ln(\sin t)\right| dt$ existe aussi, donc la question a du sens et prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} \varphi(x)^2 dx$ revient à prouver que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 dx - \int_0^{\pi/2} \varphi(x)^2 dx \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\Psi_n(x)^2 - \varphi(x)^2 \right) dx \right) = 0\,.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^{\pi/2} \left(\Psi_n(x)^2 - \varphi(x)^2 \right) dx \right| \leq \int_0^{\pi/2} \left| \Psi_n(x)^2 - \varphi(x)^2 \right| dx$$

Et :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \left| \Psi_n(x)^2 - \varphi(x)^2 \right| dx &= \int_0^{\alpha_n} \left| \Psi_n(x)^2 - \varphi(x)^2 \right| dx + \int_{\alpha_n}^{\pi/2} \left| \Psi_n(x)^2 - \varphi(x)^2 \right| dx \\
&= \int_0^{\alpha_n} \left(\varphi(x)^2 - \Psi_n(x)^2 \right) dx + \int_{\alpha_n}^{\pi/2} \left(\Psi_n(x)^2 - \varphi(x)^2 \right) dx
\end{aligned}$$

On a $0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\varphi(x)^2 - \Psi_n(x)^2 \right) dx \leq \int_0^{\alpha_n} \varphi(x)^2 dx$ et comme $\alpha_n = \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\alpha_n} \varphi(x)^2 dx = 0$ et on peut conclure par le théorème des gendarmes que :

$$\int_0^{\alpha_n} \left(\varphi(x)^2 - \Psi_n(x)^2 \right) dx\,.$$

Pour tout $x\in\left[\alpha_n,\dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{aligned}\Psi_n(x)^2-\varphi(x)^2&=\left(\Psi_n(x)-\varphi(x)\right)\left(\Psi_n(x)+\varphi(x)\right)\\&=\left|\Psi_n(x)-\varphi(x)\right|\left|\Psi_n(x)+\varphi(x)\right|\\&=\left|\ln\left(a_n^2\cos^2x+b_n^2\sin^2x\right)-\ln\left(\sin^2x\right)\right|\left|\ln\left(a_n^2\cos^2x+b_n^2\sin^2x\right)+\ln\left(\sin^2x\right)\right|\\&=\left|\ln\left(a_n^2\operatorname{cotan}^2x+b_n^2\right)\right|\left|\ln\left(a_n^2\operatorname{cotan}^2x+b_n^2\right)+2\ln\left(\sin^2x\right)\right|\end{aligned}$$

On a de plus avec $\alpha_n\le x\le\dfrac{\pi}{2}$:

$$0\le\operatorname{cotan}x\le\operatorname{cotan}\alpha_n=\sqrt{2n+1}\quad\Leftrightarrow\quad b_n^2\le a_n^2\operatorname{cotan}^2x+b_n^2\le a_n^2(2n+1)+b_n^2=1.$$

Donc :

$$\left|\ln\left(a_n^2\operatorname{cotan}^2x+b_n^2\right)\right|\le\left|\ln(b_n^2)\right|=2\left|\ln(b_n)\right|.$$

Et :

$$\begin{aligned}\left|\ln\left(a_n^2\operatorname{cotan}^2x+b_n^2\right)+2\ln\left(\sin^2x\right)\right|&=-\ln\left(a_n^2\operatorname{cotan}^2x+b_n^2\right)-4\ln(\sin x)\\&=\left|\ln\left(a_n^2\operatorname{cotan}^2x+b_n^2\right)\right|+4\left|\ln(\sin x)\right|\end{aligned}$$

Donc :

$$\Psi_n(x)^2-\varphi(x)^2\le2\left|\ln(b_n)\right|\left(2\left|\ln(b_n)\right|+4\left|\ln(\sin x)\right|\right).$$

Et :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_n}^{\pi/2}\left(\Psi_n(x)^2-\varphi(x)^2\right)dx&\le\int_{\alpha_n}^{\pi/2}\left(2\left|\ln(b_n)\right|\left(2\left|\ln(b_n)\right|+4\left|\ln(\sin x)\right|\right)\right)dx\\&\le4\left|\ln(b_n)\right|\left[\left|\ln(b_n)\right|\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_n\right)+2\int_{\alpha_n}^{\pi/2}\left|\ln(\sin x)\right|dx\right]\end{aligned}$$

Et comme $\int_0^{\pi/2}\left|\ln(\sin x)\right|dx$, on peut écrire :

$$0\le\int_{\alpha_n}^{\pi/2}\left(\Psi_n(x)^2-\varphi(x)^2\right)dx\le4\left|\ln(b_n)\right|\left[\frac{\pi}{2}\left|\ln(b_n)\right|+2\int_0^{\pi/2}\left|\ln(\sin x)\right|dx\right]$$

Enfin, $b_n=\dfrac{n}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}4\left|\ln(b_n)\right|\left[\dfrac{\pi}{2}\left|\ln(b_n)\right|+2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left|\ln(\sin x)\right|dx\right]=0$ et le théorème des gendarmes donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\alpha_n}^{\pi/2}\left(\Psi_n(x)^2-\varphi(x)^2\right)dx=0.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left|\Psi_n(x)^2-\varphi(x)^2\right|dx=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\Psi_n(x)^2-\varphi(x)^2\right)dx=0$, soit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\Psi_n(x)^2dx=\int_0^{\pi/2}\varphi(x)^2dx}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n > 0$ et $b_n > 0$, donc en notant $\rho_n = \dfrac{b_n - a_n}{b_n + a_n} = \dfrac{n-1}{n+1}$, on a d'après la question **Q18** :

$$\int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 dx = 2\pi\left(\ln\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)\right)^2 + \pi\sigma(\rho_n^2) = 2\pi\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \pi\sigma(\rho_n^2) = 2\pi(\ln 2)^2 + \pi\sigma(\rho_n^2).$$

Et $\rho_n^2 = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, donc, comme d'après la question **Q1**, σ est continue en 1, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 dx = 2\pi(\ln 2)^2 + \pi\sigma(1).$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \varphi(x)^2 dx = 2\pi(\ln 2)^2 + \pi\sigma(1)}$$

Problème 2

Partie I

Q22. Comme H est un sous-espace de E_n, il contient la matrice nulle, donc $T \neq 0_n$ car $T \notin H$.

Alors, $\mathrm{Vect}(T)$ est une droite non incluse dans H (donc $H \cap \mathrm{Vect}(T) = \{0_n\}$) et ainsi :

$$\boxed{E_n = H \oplus \mathrm{Vect}(T)}$$

Q23. D'après ce qui est rappelé dans l'énoncé, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$E_{i,j}^2 = E_{i,j}E_{i,j} = \begin{cases} 0_n & \text{quand } i \neq j \\ E_{i,i} & \text{quand } i = j \end{cases}$$

Donc, $E_{i,j}^2 = 0_n$ si et seulement si $i \neq j$, donc :

$$\boxed{\text{Les matrices nilpotentes de la base canonique sont les matrices } E_{i,j} \text{ telles que } i \neq j.}$$

Q24. On a $U = \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} (E_{i,j} + E_{j,i})$. Alors, $U + I_n$ est la matrice qui ne contient que des 1 et :

$$(U + I_n)^2 = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = n(U + I_n).$$

Ceci donne $U^2 - (n-2)U = [U - (n-2)I_n]U = (n-1)I_n$ et comme $n \geq 2$, on a $n - 1 \neq 0$, donc :

$$\frac{1}{n-1}[U - (n-2)I_n]U = I_n.$$

Ainsi, il existe une matrice $V=\dfrac{1}{n-1}\left[U-(n-2)I_n\right]$ telle que $VU=I_n$, ce qui prouve que :

$$\boxed{U \text{ est inversible, d'inverse } U^{-1}=\frac{1}{n-1}\left[U-(n-2)I_n\right].}$$

Q25. a. Si H ne contient pas de matrice inversible, alors $I_n \notin H$ car I_n est inversible. D'après la question **Q22**, on a alors :

$$E_n = H \oplus \mathrm{Vect}(I_n).$$

Comme $N \in E_n$:

$$\boxed{\text{Il existe une matrice } A\in H \text{ et } \alpha\in\mathbb{R} \text{ tels que } N=A+\alpha I_n.}$$

b. Comme N est nilpotente, il existe un entier naturel p non nul tel que $N^p=(A+\alpha I_n)^p=0_n$ et comme A et I_n commutent, on peut utiliser la formule de binôme qui donne :

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\alpha^{p-k}A^k=\alpha^p I_n+\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}\alpha^{p-k}A^k=\alpha^p I_n+A\left(\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}\alpha^{p-k}A^{k-1}\right)=0_n.$$

En posant $Q=-\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}\alpha^{p-k}X^{k-1}\in\mathbb{R}[X]$, on a alors $\alpha^p I_n - AQ(A)=0_n$, soit :

$$\boxed{AQ(A)=\alpha^p I_n}$$

c. Si $\alpha\neq 0$, alors $A\left[\dfrac{1}{\alpha^p}Q(A)\right]=I_n$, ce qui prouve que A est inversible. Or, $A\in H$ et on a supposé que H ne contient pas de matrice inversible, donc $\alpha=0$ et ainsi $N=A\in H$, donc :

$$\boxed{N\in H}$$

Q26. On a vu que toute matrice $E_{i,j}$ avec $i\neq j$ est nilpotente. Or, la question précédente a prouvé que toute matrice nilpotente est dans H, donc $E_{i,j}\in H$ pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $i\neq j$.

Mais H est un sous-espace de E_n, donc stable par somme. Alors, $U=\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n}^{n}(E_{i,j}+E_{j,i})\in H$.

Ainsi, si H ne contient pas de matrice inversible, alors la matrice U, qui est inversible (question **Q24**), appartient à H. Ceci est absurde, donc :

$$\boxed{H \text{ contient au moins une matrice inversible de } E_n.}$$

Partie II

Q27. D'après la partie précédente, si $I_n \notin H$, alors $E_n = H \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$, donc p la projection sur $\mathrm{Vect}(I_n)$ parallèlement à H est bien définie.

Soient M, N deux matrices de E_n. On a $M = A + \alpha I_n$ et $N = B + \beta I_n$ avec $A, B \in H$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$MN = (A + \alpha I_n)(B + \beta I_n) = AB + \beta A + \alpha B + \alpha\beta I_n .$$

Et, $AB \in H$ (car H est stable par multiplication) donc $AB + \beta A + \alpha B \in H$ (car H est stable par combinaison linéaire).

Ainsi :

$$p(MN) = \alpha\beta I_n .$$

Or :

$$\begin{cases} p(M) = \alpha I_n \\ p(N) = \beta I_n \end{cases} \quad \text{donc} \quad p(M)p(N) = \alpha\beta I_n .$$

Finalement, on a bien pour toutes matrices M, N de E_n :

$$\boxed{p(MN) = p(M)p(N)}$$

Q28. Posons $M = A + \alpha I_n$ avec $A \in H$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $p(M) = \alpha I_n$.

Si $M^2 \in H$, alors $p(M^2) = 0_n$.

Or, d'après la question précédente, $p(M^2) = p(M)^2 = (\alpha I_n)^2 = \alpha^2 I_n$, donc :

$$p(M^2) = 0_n \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 I_n = 0_n \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 .$$

Alors, $M = A \in H$. Ainsi, on a bien :

$$\boxed{M^2 \in H \quad \Rightarrow \quad M \in H}$$

Q29. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. On a vu que $E_{i,j}^2 = 0_n \in H$, donc d'après la question précédente :

$$E_{i,j} \in H .$$

Soit maintenant $i \in [\![1, n]\!]$. Pour $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$, on a :

$$E_{i,i} = E_{i,j} E_{j,i} .$$

Comme $E_{i,j} \in H$, $E_{j,i} \in H$ et H est stable par multiplication :

$$E_{i,i} \in H .$$

Finalement :

$$\boxed{E_{i,j} \in H \text{ pour tout } (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 .}$$

Q30. Comme pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $E_{i,i} \in H$, on a $I_n = \sum_{i=1}^{n} E_{i,i} \in H$ car H est stable par somme.

Ainsi, supposer que $I_n \notin H$ mène à $I_n \in H$, ce qui est absurde et donc :

$$\boxed{I_n \in H}$$

Partie III

Q31. Si on considère $H = \mathcal{T}_2^{\sup}(\mathbb{R})$, le sous-espace des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\dim H = \frac{2(2+1)}{2} = 3 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - 1.$$

Donc, H est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

De plus le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure.

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{T}_2^{\sup}(\mathbb{R}) \text{ est un hyperplan de } E_2 \text{ stable par multiplication de matrices.}}$$

Q32. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j \le [\![1,n]\!]}$ et $B = \left(b_{i,j}\right)_{i,j \le [\![1,n]\!]}$.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda A + B = \left(\lambda a_{i,j} + b_{i,j}\right)_{i,j \le [\![1,n]\!]}$ et :

$$tr(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,i} + b_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda\, tr(A) + tr(B).$$

  Donc :

$$\boxed{tr\,(\lambda A + B) = \lambda\, tr\,(A) + tr\,(B)}$$

- Posons $AB = \left(c_{i,j}\right)_{i,j \le [\![1,n]\!]}$ et $BA = \left(d_{i,j}\right)_{i,j \le [\![1,n]\!]}$.

  Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$ et $d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j}$, donc :

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} d_{k,k} = tr(BA).$$

  Ainsi :

$$\boxed{tr(AB) = tr(BA)}$$

Q33. On a :

$$\boxed{\dim H + \dim H^{\perp} = \dim E_n}$$

Comme H est un hyperplan, on a $\dim H = \dim E_n - 1$, et donc :

$$\boxed{\dim H^{\perp} = 1}$$

Q34. Soit une matrice B de H.

Montrer que $BA^{\top}$ est proportionnelle à $A^{\top}$ revient à montrer que $(BA^{\top})^{\top} = AB^{\top}$ est proportionnelle à A.

Or, comme $\dim H^{\perp} = 1$ et A est un élément non nul de $H^{\perp}$, on a $H^{\perp} = \text{Vect}(A)$, donc montrer que $AB^{\top}$ est proportionnelle à A revient à montrer $AB^{\top} \in H^{\perp}$.

Soit $M \in H$. On a :

$$\left(M \mid AB^{\top}\right) = tr\left(M^{\top}(AB^{\top})\right) = tr(M^{\top}AB^{\top}) = tr(B^{\top}M^{\top}A) = tr\left((MB)^{\top}A\right) = \left(MB \mid A\right).$$

Or, $M \in H$, $B \in H$ et H est stable par multiplication, donc $MB \in H$ et comme $A \in H^{\perp}$, on a $\left(MB \mid A\right) = 0$.

Ainsi, pour toute $M \in H$, $\left(M \mid AB^{\top}\right) = 0$, donc $AB^{\top} \in H^{\perp}$, et ainsi :

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } B \text{ de } H,\ BA^{\top} \text{ est proportionnelle à } A^{\top}.}$$

Q35. On vient de prouver que pour toute matrice B de H, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $BA^{\top} = \lambda A^{\top}$.

Si $A^{\top}$ est inversible, alors pour toute matrice B de H, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$B = BA^{\top}(A^{\top})^{-1} = \lambda A^{\top}(A^{\top})^{-1} = \lambda I_n.$$

Autrement dit, pour tout $B \in H$, $B \in \text{Vect}(I_n)$, donc $H \subset \text{Vect}(I_n)$ et $\dim H \leq 1$.

Or, $\dim H = \dim E_n - 1 = n^2 - 1 \geq 3$ car $n \geq 2$. Ceci est donc absurde et :

$$\boxed{A^{\top} \text{ n'est pas inversible.}}$$

Q36. Soit $B \in H$.

On veut montrer que $W = \text{Im}(A^{\top})$ est stable pour B, c'est-à-dire que pour tout $Y \in W = \text{Im}(A^{\top})$, $BY \in W$ ou encore que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $B(A^{\top}X) \in W$.

Or, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $BA^{\top} = \lambda A^{\top}$, donc pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$B(A^{\top}X) = (BA^{\top})X = \lambda A^{\top}X = A^{\top}(\lambda X) \in W = \text{Im}(A^{\top}).$$

Ainsi, quel que soit B dans H :

$$\boxed{W = \text{Im}(A^{\top}) \text{ est stable pour } B.}$$

Q37. Pour toute matrice A de E_n, les applications $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$ sont des endomorphismes de E_n, donc φ_P, qui est la composée de $M \mapsto P^{-1}M$ par $N \mapsto NP$, est un endomorphisme de E_n.

De plus, pour toute $N \in E_n$, on a :

$$\varphi_P(M) = N \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}MP = N \quad \Leftrightarrow \quad M = PNP^{-1}.$$

Donc, toute matrice N de E_n admet un unique antécédent par φ_P, ce qui prouve que φ_P est bijective.

Finalement, φ_P est un endomorphisme bijectif de E_n, soit :

$$\boxed{\varphi_P \text{ est un automorphisme de } E_n.}$$

Q38. Comme φ_P est un automorphisme de E_n, on a $\dim \varphi_P(H) = \dim H$.

Soit $B \in H$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. On a donc $B = M_{\mathcal{B}_c}(u)$ où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}_1$, on a :

$$M_{\mathcal{B}_1}(u) = P^{-1}BP = \varphi_P(B).$$

Or, d'après la question **Q36**, $\operatorname{Im}(A^\top)$ est stable pour B, donc pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $e_k \in \operatorname{Im}(A^\top)$ et :

$$Be_k \in \operatorname{Im}(A^\top) = \operatorname{Vect}\left(e_1, \dots, e_p\right).$$

Ceci prouve que la matrice $M_{\mathcal{B}_1}(u)$ est de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0_{n-p,p} & A_3 \end{array}\right) \text{ avec } A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ A_2 \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R}) \text{ et } A_3 \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{R}).$$

Si on appelle F le sous-espace vectoriel de E_n des matrices de cette forme, on a alors :

$$\forall\, B \in H\ ,\ M_{\mathcal{B}_1}(u) = \varphi_P(B) \in F\ .$$

Soit :

$$\varphi_P(H) \subset F\ .$$

Or :

$$F = \operatorname{Vect}\left(E_{i,j}, (i, j) \in [\![1, p]\!]^2 \cup [\![1, n]\!] \times [\![p+1, n]\!]\right).$$

La famille $\left(E_{i,j}\right)_{(i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \cup [\![1,n]\!] \times [\![p+1,n]\!]}$ est génératrice de F et, comme elle est extraite de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elle est libre. Ainsi, c'est une base de F et :

$$\dim F = \operatorname{Card}\left(E_{i,j}, (i, j) \in [\![1, p]\!]^2 \cup [\![1, n]\!] \times [\![p+1, n]\!]\right) = \operatorname{Card}\left([\![1, p]\!]^2 \cup [\![1, n]\!] \times [\![p+1, n]\!]\right).$$

Les ensembles $[\![1,p]\!]^2$ et $[\![1,n]\!]\times[\![p+1,n]\!]$ étant disjoints, on obtient :

$$\dim F = \mathrm{Card}\left([\![1,p]\!]^2\right)+\mathrm{Card}\left([\![1,n]\!]\times[\![p+1,n]\!]\right) = p^2+n(n-p) = n^2-p(n-p)\ .$$

Finalement, comme $\dim\varphi_P(H)=\dim H$ et $\varphi_P(H)\subset F$, on a $\dim H=\dim\varphi_P(H)\leq\dim F$, d'où :

$$\boxed{\dim H\leq n^2-p(n-p)}$$

Q39. On a vu que $\dim H=\dim E_n-1=n^2-1$, donc :

$$n^2-1\leq n^2-p(n-p) \quad\Leftrightarrow\quad p(n-p)\leq 1\ .$$

Remarquons que A n'est pas nulle, donc ${}^tA$ non plus et $p=rg\,({}^tA)\geq 1$.

D'après le théorème dur rang :

$$\dim\mathbb{R}^n = rg\,(A^\top)+\dim(\ker A^\top) \quad\Leftrightarrow\quad \dim(\ker A^\top)=\dim\mathbb{R}^n-rg\,(A^\top)=n-p\ .$$

De plus, d'après la question **Q35**, $A^\top$ n'est pas inversible donc $\dim(\ker A^\top)=n-p\geq 1$.

Ainsi, $p\geq 1$ et $n-p\geq 1$, donc $p(n-p)\geq 1$ et avec $p(n-p)\leq 1$, on obtient :

$$p(n-p)=1\ .$$

Comme p et $n-p$ sont des entiers naturels, on obtient :

$$p=n-p=1\ .$$

Ceci implique que $n=2$.

Ainsi, l'existence d'un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit implique que $n=2$, donc :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'hyperplan de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ stable par produit quand } n\geq 3\ .}$$