Corrigé du DM n° 3

Partie I : Nilpotence

1) a. Comme A est nilpotente, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, A^k = 0_n\}$ est non vide. De plus, $A^0 = I_n \neq 0_n$, donc $0 \notin \{k \in \mathbb{N}, A^k = 0_n\}$. Ainsi, cet ensemble est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, donc admet un plus petit élément $p \in \mathbb{N}^*$. On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- si $k < p$, $k \notin \{k \in \mathbb{N}, A^k = 0_n\}$ et donc $A^k \neq 0_n$;
- si $k \geq p$, $A^k = A^p A^{k-p} = 0_n A^{k-p} = 0_n$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe } p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que pour tout } k \in \mathbb{N},\ A^k = 0_n \text{ quand } k \geq p \text{ et } A^k \neq 0_n \text{ quand } k < p.}$$

b. On a $A^p = 0_n$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, donc $\det(A^p) = (\det A)^p = 0$, ce qui implique $\det A = 0$ et ainsi :

$$\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$$

c. Comme $p-1 < p$, $A^{p-1} \neq 0_n$, donc :

$$\boxed{\text{Il existe un vecteur } Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } A^{p-1}Y \neq 0.}$$

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\lambda_{p-1}A^{p-1}Y + \dots + \lambda_1 AY + \lambda_0 Y = 0$.

Supposons l'un des λ_k non nul et notons $m = \min\{k \in [\![0, p-1]\!], \lambda_k \neq 0\}$. On a donc $\lambda_m \neq 0$ et $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$ (si cet ensemble est non vide).

On a alors $\lambda_{p-1}A^{p-1}Y + \dots + \lambda_m A^m Y = 0$ et en appliquant A^{p-1-m}, on obtient :

$$A^{p-1-m}\left(\lambda_{p-1}A^{p-1}Y + \dots + \lambda_m A^m Y\right) = \lambda_{p-1}A^{2(p-1)-m}Y + \dots + \lambda_{m+1}A^p Y + \lambda_m A^{p-1}Y = \lambda_m A^{p-1}Y = 0.$$

Or, $A^{p-1}Y \neq 0$, donc $\lambda_m A^{p-1}Y = 0$ donne $\lambda_m = 0$, ce qui est absurde.

Ainsi, supposer que l'un des λ_k est non nul mène à une absurdité, donc tous les λ_k sont nuls, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\text{La famille } \left(A^{p-1}Y, A^{p-2}Y, \dots, AY, Y\right) \text{ est libre.}}$$

d. La famille $\left(A^{p-1}Y, A^{p-2}Y, \dots, AY, Y\right)$ est une famille libre de p vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension n, donc :

$$\boxed{p \leq n}$$

e. On suppose ici que $p = n$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. D'après la question c, il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{B} = \left(u^{n-1}(y), u^{n-2}(y), \dots, u(y), y\right)$ est libre. Or, cette famille contient n vecteurs et $n = \dim \mathbb{R}^n$, donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. On a alors :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\delta_{i+1,j}\right)_{1\le i,j\le n}.$$

Comme $M_{\mathcal{B}_c}(u) = A$ où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, A et $\left(\delta_{i+1,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ sont les matrices du même endomorphisme dans deux bases, donc :

$$\boxed{A \text{ est semblable à } \left(\delta_{i+1,j}\right)_{1\le i,j\le n}.}$$

2) On vient de voir que pour toute matrice $A \in \mathcal{N}$, d'indice de nilpotence p, soit $A \in \mathcal{N}_p$, on a $p \in [\![1,n]\!]$, donc : $\underline{\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{N}_n}$.

Et, par définition, $\mathcal{N}_p \subset \mathcal{N}$ pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, donc : $\underline{\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{N}_n \subset \mathcal{N}}$.

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{N}_n}$$

3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. On veut prouver que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^k$ est continue.

Pour une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque, notons $\left[P\right]_{i,j}$ ses coefficients.

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, l'application $M \mapsto M^k$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $M \mapsto \left[M^k\right]_{i,j}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$.

Prouvons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $M \mapsto \left[M^k\right]_{i,j}$ est polynômiale en les coefficients de M, donc en les $\left[M\right]_{\ell,\ell'}$ ($\ell, \ell' \in [\![1,n]\!]$).

- Pour $k = 1$ et pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $M \mapsto \left[M\right]_{i,j}$ est bien polynômiale en les $\left[M\right]_{\ell,\ell'}$, donc la propriété est vraie au rang $k = 1$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}^*$. On a pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$:

$$\left[M^{k+1}\right]_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} \left[M\right]_{i,r} \left[M^k\right]_{r,j}.$$

  Comme les $\left[M^k\right]_{r,j}$ sont polynômiales en les $\left[M\right]_{\ell,\ell'}$ par hypothèse de récurrence, les $\left[M\right]_{i,r}\left[M^k\right]_{r,j}$ le sont aussi et il en va de même de leur somme.

  Ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Alors, si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, l'application $M \mapsto \left[M^k\right]_{i,j}$ est polynômiale en les coefficients de M, alors elle est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (qui est de dimension finie) et d'après ce que l'on a annoncé au début de cette question, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{L'application } M \mapsto M^k \text{ est continue sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

4) Notons φ l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^n$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\varphi(M) = M^n = 0_n \quad \Leftrightarrow \quad M \in \mathcal{N}.$$

Donc :

$$\mathcal{N} = \varphi^{-1}\left(\{0_n\}\right).$$

D'après la question précédente, φ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or, $\{0_n\}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\varphi^{-1}\left(\{0_n\}\right)$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{N} \text{ est fermé dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

5) Soient E et F deux parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ce qui suit est vrai dans n'importe quel espace normé) telles que $E \subset F$, et $\overline{E}$ et $\overline{F}$ leurs adhérences.
Soit $x \in \overline{E}$. Par caractérisation séquentielle, il existe une suite $(x_k) \in E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x. Or, $E \subset F$, donc $(x_k) \in F^{\mathbb{N}}$ et ainsi, $x \in \overline{F}$. Ceci prouve que $\overline{E} \subset \overline{F}$.

On a vu dans la question 1)b qu'aucune matrice de $\mathcal{N}$ n'est inversible, donc :

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{N}.$$

D'après ce que l'on vient de prouver, on a alors :

$$\overline{GL_n(\mathbb{R})} \subset \overline{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{N}} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Or, on a admis que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\overline{GL_n(\mathbb{R})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ainsi :

$$\overline{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{N}} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{N} \text{ est dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

6) Soient $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A_2^2 = B_2^2 = 0_2$, $A_2 + B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\left(A_2 + B_2\right)^2 = I_2$, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(A_2 + B_2\right)^{2k} = I_2$ et $\left(A_2 + B_2\right)^{2k+1} = A_2 + B_2$, donc $\left(A_2 + B_2\right)^k \neq 0_2$.

Ainsi, la matrice $\frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}B_2$ n'est pas nilpotente, donc $\mathcal{N}$ n'est pas convexe quand $n = 2$.

Pour $n>2$ En posant $A=\begin{pmatrix} A_2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} B_2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$, on a $A^2=B^2=0_n$, mais pour tout $k\in\mathbb{N}$, $(A+B)^k=\begin{pmatrix} (A_2+B_2)^k & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}\neq 0_n$, donc $\frac{1}{2}A_2+\frac{1}{2}B_2$ n'est pas nilpotente.

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{N} \text{ n'est pas convexe.}}$$

7) a. Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. On a :

$$\chi_A(\lambda)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \det(\lambda I_3-A)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda I_3-A\notin GL_n(\mathbb{R}) \quad\Leftrightarrow\quad \ker(\lambda I_3-A)\neq\{0\}.$$

Or, $X\in\ker(\lambda I_3-A)$ revient à $AX=\lambda X$, donc λ est racine de χ_A si et seulement s'il existe $Z\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}$ tel que $AZ=\lambda Z$, autrement dit : (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

De plus, s'il existe $Z\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}$ tel que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A^kZ=\lambda^kZ$, alors on a, entre autres, pour $k=1$, $AZ=\lambda Z$, donc : (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Prouvons la réciproque.

Supposons qu'il existe $Z\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}$ tel que $AZ=\lambda Z$. Prouvons par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$, que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A^kZ=\lambda^kZ$.

- On a $A^0Z=Z=\lambda^0Z$, donc la propriété est vraie au rang $k=0$.
- Si pour $k\in\mathbb{N}$ donné, on a $A^kZ=\lambda^kZ$, alors :

$$A^{k+1}Z=A^k(AZ)=A^k(\lambda Z)=\lambda A^kZ=\lambda(\lambda^kZ)=\lambda^{k+1}Z.$$

  Donc, la propriété est vraie au rang $k+1$.

La propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k\in\mathbb{N}$ et ainsi : (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Finalement, on a (i) $\Leftrightarrow$ (ii) et (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), donc :

$$\boxed{\text{Les trois propriétés (i), (ii) et (iii) sont bien équivalentes.}}$$

b. Soit λ une racine complexe de χ_A : il en existe d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

D'après ce qui précède, il existe $Z\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}$ tel que $AZ=\lambda Z$, et donc $A^pZ=\lambda^pZ$ où p est l'indice de nilpotence de A. Comme $A^p=0_n$, on a alors $\lambda^pZ=0$, donc $\lambda^p=0$ car $Z\neq 0$, et ainsi, $\lambda=0$.

Ceci prouve que la seule racine complexe de χ_A est 0. Or, toujours d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$ et comme on a admis que χ_A est unitaire, de degré n, on peut conclure que :

$$\boxed{\chi_A=X^n}$$

8) On considère $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ non nul et $\mathscr{E} = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\, P(A) = 0_n \right\}$.

D'après la question 3, l'application $M \mapsto M^k$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Il en va de même pour l'application constante $M \mapsto M^0 = I_n$.

Alors, l'application $\psi : M \mapsto P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme combinaison linéaires d'applications continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Or, $\mathscr{E} = \psi^{-1}\left(\left\{0_n\right\}\right)$ et $\left\{0_n\right\}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc :

$$\boxed{\mathscr{E} = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\, P(A) = 0_n \right\} \text{ est fermé dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$