DS de Mathématiques n° 1

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 5 pages.

Fortement inspiré de : CentraleSupélec 2024 – TSI - Mathématiques 1

Dans tout ce sujet, on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus *n*, avec $n \in \mathbb{N}$).

Pour un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on note P' son polynôme dérivé et $P^{(j)}$ le polynôme dérivé d'ordre *j* de P de telle sorte que $P = P^{(0)}$, $P' = P^{(1)}$, $P'' = P^{(2)}$, etc.

On pourra confondre un polynôme et sa fonction polynomiale associée. De même, on pourra confondre le polynôme dérivé P' avec la fonction dérivée de la fonction polynomiale P.

On rappelle également que la partie entière d'un réel *x* est un entier, noté $\lfloor x \rfloor$, et que celle-ci vérifie la double inégalité $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$.

I – Préliminaires

On considère la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par $G_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ G_{n+1} = X\left(G_n + (X+1)G_n'\right).$$

Q1. Donner G_1 et G_2 sous forme développée.

Q2. Donner en justifiant l'ensemble *I* des réels *x* tels que la série $\sum x^n$ converge et donner sa somme quand elle converge.

Q3. Soit $p \in \mathbb{N}$. Prouver que la série $\sum n^p x^n$ converge si et seulement si $x \in I$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note D_p la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n^p x^n$, définie sur *I*.

Q4. On admet que D_p est dérivable sur I et que sa dérivée D_p' est obtenue en dérivant terme à terme la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} n^p x^n$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, on a $D_{p+1}(x) = x D_p'(x)$.

Q5. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel p et tout $x \in I$, on a :

$$D_p(x) = \frac{1}{1-x} G_p\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

II – Nombres de Fubini

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} F_k .$$

II.A – Dénombrement

Q6. Calculer F_1, F_2 et F_3.

On rappelle qu'une partition d'un ensemble *E* non vide est un ensemble de parties non vides de *E*, deux à deux disjointes et dont la réunion est l'ensemble *E* tout entier.

Une *partition ordonnée* de *E* est un *p*-uplet $(X_1, \dots, X_p)$ de parties de *E* telles $\{X_1, \dots, X_p\}$ est une partition de *E*.

Par exemple, les trois partitions ordonnées de l'ensemble $\{1,2\}$ sont $(\{1\},\{2\})$, $(\{2\},\{1\})$ et $(\{1,2\})$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de partitions ordonnées de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Par convention, on pose qu'il existe une seule partition ordonnée de l'ensemble vide de sorte que l'on pose $u_0 = 1$.

Q7. Donner les partitions ordonnées de l'ensemble $\{1,2,3\}$, puis leur nombre.

Q8. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_{n-k}$.

☺ *Pour construire une partition ordonnée, on pourra commencer par choisir le cardinal de la première partie formant cette partition.*

Q9. En conclure que les suites $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales.

II.B – Majoration des nombres de Fubini

Q10. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!} \leq 1$. On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Q11. Prouver par récurrence forte que, pour tout entier naturel *n*, on a $0 \leq \frac{F_n}{n!} \leq \frac{1}{(\ln 2)^n}$.

Q12. En déduire que pour tout réel *x* tel que $|x| < \ln 2$, la série $\sum \frac{F_n}{n!} x^n$ converge.

II.C – Minoration des nombres de Fubini

On pose $J = \left]-\ln 2, \ln 2\right[$ et pour tout $x \in J$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{n!} x^n$.

Q13. Montrer que pour tout $x \in J$, $2\big(f(x)-1\big) = e^x f(x) - 1$.

☺ *On pourra penser au produit de Cauchy.*

Q14. Prouver alors que *f* est de classe C^∞ sur *J* et que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in J$:

$$f^{(k)}(x) = G_k\left(\frac{1}{2e^{-x}-1}\right) f(x).$$

Q15. On admet que si, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto \frac{F_n}{n!} x^n$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = F_n$ et en déduire que $F_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k}$.

Q16. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $h_n : t \mapsto t^n e^{-t\ln 2}$.

Montrer que h_n admet un maximum sur $\mathbb{R}_+$, noté M_n, que l'on explicitera.

Q17. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $2F_n \geq \sum_{k=\lfloor t \rfloor+1}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k} \geq \frac{t^n}{2^{\lfloor t \rfloor}} \geq h_n(t)$.

Q18. En déduire la minoration $F_n \geq \frac{1}{2}\left(\frac{n}{e\ln 2}\right)^n$.

III – Équivalent de F_n

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $H_n(x) = \int_0^x h_n(t)\,dt$ où h_n est la fonction définie dans la question **Q16**.

III.A – Valeur d'une intégrale

Q19. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(\ln 2) H_{n+1}(x) = (n+1)H_n(x) - h_{n+1}(x)$.

Q20. Prouver alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(x)$ admet une limite finie quand *x* tend vers $+\infty$ et calculer cette limite.

On la note $\int_0^{+\infty} h_n(t)\,dt$ *et pour tout* $a \in \mathbb{R}_+$, *on note* $\int_a^{+\infty} h_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} h_n(t)\,dt - \int_0^a h_n(t)\,dt$.

III.B – Comparaison série/intégrale

Dans toute la suite de cette partie, on suppose $n \in \mathbb{N}^*$.

Q21. Justifier qu'il existe un entier $N \geq 1$, dépendant de *n* tel que h_n est croissante sur $[0, N]$ et décroissante sur $[N+1, +\infty[$.

Q22. Justifier que $\sum_{k=0}^{N-1} h_n(k) \leq \int_0^N h_n(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{N} h_n(k)$.

Q23. Justifier que la série $\sum_{k\geq N+1} h_n(k)$ converge puis établir l'encadrement :

$$\sum_{k=N+2}^{+\infty} h_n(k) \leq \int_{N+1}^{+\infty} h_n(t)\,dt \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} h_n(k).$$

Q24. Déduire des encadrements précédents que :

$$-\int_{N}^{N+1} h_n(t)\,dt \leq 2F_n - \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} \leq h_n(N) + h_n(N+1) - \int_{N}^{N+1} h_n(t)\,dt.$$

Q25. Justifier que $-M_n \leq 2F_n - \dfrac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} \leq 2M_n$, puis en déduire que :

$$F_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}}.$$

On pourra utiliser librement la formule de Stirling qui donne l'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

IV – Une suite d'Appell

Pour un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, noté parfois également $P(X)$, on note $P(X+1)$ le polynôme obtenu en substituant l'indéterminée X de P par $X+1$.

À titre d'exemple, si $P(X) = X^2 - 3X + 7$, alors $P(X+1) = (X+1)^2 - 3(X+1) + 7 = X^2 - X + 5$.

Dans toute cette partie, on considère un entier naturel n fixé.

IV.A – Étude d'un endomorphisme

On note φ_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi_n : P \mapsto 2P(X) - P(X+1)$.

Q26. Montrer que, pour tout polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$, les polynômes P et $P(X+1)$ ont le même degré et le même coefficient dominant.

Q27. Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q28. Prouver que φ_n est injectif.

Q29. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $2P_n(X) - P_n(X+1) = X^n$.

IV.B – Premières propriétés des P_n

Q30. Justifier que $\deg P_n = n$.

Q31. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{k^n}{2^k} = \dfrac{P_n(k)}{2^{k-1}} - \dfrac{P_n(k+1)}{2^k}$ et en déduire que $F_n = P_n(0)$.

Q32. Montrer que $P_{n+1}' = (n+1)P_n$.

Q32. En utilisant la formule de Taylor pour les polynômes, montrer que :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{n-k} X^k.$$

IV.C – Structure euclidienne

Dans toute la suite, pour des polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(2P^{(j)}(0)-P^{(j)}(1)\right)\left(2Q^{(j)}(0)-Q^{(j)}(1)\right)}{(j!)^2}.$$

Q34. Soit $P\in \mathbb{R}_n[X]$. Justifier qu'il existe un unique $(a_0, a_1, \ldots, a_n)\in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$P = a_0P_0 + a_1P_1 + \ldots + a_nP_n .$$

Q35. Justifier que $\varphi_n\left(P^{(j)}\right) = \left(\varphi_n(P)\right)^{(j)}$ pour tout polynôme $P\in \mathbb{R}_n[X]$ et tout entier naturel *j*, puis montrer que $(P,Q)\mapsto \langle P,Q\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Q36. Justifier que pour tout couple d'entiers naturels (j,k), on a :

$$2P_k^{(j)}(0) - P_k^{(j)}(1) = \delta_{j,k}k!$$

où $\delta_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } j\neq k \\ 1 & \text{si } j=k \end{cases}$ est le symbole de Kronecker.

Q37. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $(P,Q)\mapsto \langle P,Q\rangle$.

Q38. En déduire que, pour tout polynôme $P\in \mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\varphi_n(P)\right)^{(k)}(0)}{k!} P_k .$$

Les entiers F_n définis dans ce problème sont appelés nombres de Fubini ou nombres de Bell ordonnés et apparaissent dans des problèmes de combinatoire. La suite (P_n) de polynômes définie à partir de ces nombres vérifie des propriétés communes avec d'autres suites de polynômes (polynômes de Bernoulli, polynômes d'Hermite...) qui sont à l'origine de la notion de suites d'Appell.

- FIN DU SUJET -