DM de Mathématiques n° 2

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n^{(p)} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^p}$.

Une erreur d'énoncé s'est négligemment glissée dans le sujet… Avec un peu de recul, elle est très facilement repérable…

1) Justifier l'existence de $\left(u_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2) Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n^{(p)}$ quand $p \geq 2$.

3) Prouver que $u_n^{(1)} = \frac{(-1)^n}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n^{(1)}$.

   ☺ *On pourra utiliser une comparaison série-intégrale avec* $t \mapsto \frac{1}{(n+2t)(n+2t+1)}$.

   Cette série vérifie-t-elle le critère spécial des séries alternées ?

En cas de convergence, on pose $S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(p)}$.

4) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $N \geq 2$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n^{(p+1)} = N u_N^{(p+1)} + u_1^{(p)} - u_N^{(p)}.$$

5) En déduire que la suite $\left(N u_N^{(p+1)}\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge, que sa limite est nulle et que :

$$S_{p+1} = u_1^{(p)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^p}.$$

6) Montrer que $S_1 = \frac{1}{2}$.

7) Calculer S_2. ☺ *On pourra admettre que la suite* $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge.*

8) L'objectif de cette question est de calculer S_3.

   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

   $$P_n\left(\tan^2 t\right) = \frac{\cos\left((2n+1)t\right)}{\cos^{2n+1} t}.$$

   b. Pour $n \in \mathbb{N}$, trouver les racines de P_n et montrer que leur somme vaut $\frac{n(2n-1)}{3}$.

   c. Montrer que pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^2 t \leq \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^{-2} \leq 1 + \tan^2 t$

   d. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, puis S_3.