Corrigé du DS n° 1

I – Préliminaires

Q1. On a $G_0 = 1$ et :

$$G_1 = X\left(G_0 + (X+1)G_0'\right) = X$$
$$G_2 = X\left(G_1 + (X+1)G_1'\right) = X\left(X + (X+1)\right)$$

Donc :

$$\boxed{G_1 = X \qquad G_2 = 2X^2 + X}$$

Q2. Pour tout réel *x*, la série $\sum x^n$ est une série géométrique de raison *x*. Elle converge donc si et seulement si $|x| < 1$ et, dans ce cas, sa somme est $\dfrac{1}{1-x}$. Ainsi :

$$\boxed{I = \left]-1,1\right[\text{ et, pour tout } x \in I,\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.}$$

Q3. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Si $p = 0$, on vient de voir que $\sum x^n$ converge si et seulement si $x \in I$.

Si $p \geq 0$, alors :

- si $|x| \geq 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|n^p x^n\right| = +\infty$, donc $\sum n^p x^n$ diverge grossièrement ;
- si $|x| < 1$, alors on a $q = \dfrac{1+|x|}{2} \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$ et $\dfrac{x}{q} \in I$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{n^p x^n}{q^n}\right| = \lim\limits_{n \to +\infty} \left|n^p \left(\dfrac{x}{q}\right)^n\right| = 0$ par croissances comparées, soit $n^p x^n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(q^n\right)$ et la série géométrique positive $\sum q^n$ converge, donc par comparaison, $\sum n^p x^n$ converge.

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\text{La série } \sum n^p x^n \text{ converge si et seulement si } x \in I.}$$

Q4. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après ce qui est admis dans l'énoncé, on a pour tout $x \in I$:

$$x D_p'(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} n^p \left(n x^{n-1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p+1} x^n = D_{p+1}(x).$$

Ainsi, on a bien pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $x \in I$:

$$\boxed{D_{p+1}(x) = x\, D_p'(x)}$$

« $\forall\, x \in I$, $D_p(x) = \dfrac{1}{1-x} G_p\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ ».

Q5. On veut prouver par récurrence sur p que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\text{« } \forall\, x \in I,\ D_p(x) = \frac{1}{1-x} G_p\left(\frac{x}{1-x}\right) \text{ ».}$$

Remarquons déjà que pour tout $x \in I$, $x \neq 1$, donc $\dfrac{x}{1-x}$ est bien défini.

Initialisation :

Pour $p = 0$, on a $G_0 = 1$, donc pour tout $x \in I$, $G_0\left(\dfrac{x}{1-x}\right) = 1$ et alors :

$$D_0(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} G_0\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

La propriété est donc vraie au rang $p = 0$.

Hérédité :

Supposons la propriété vraie à un rang $p \in \mathbb{N}$. Alors, par hypothèse de récurrence, on a pour tout $x \in I$, $D_p(x) = \dfrac{1}{1-x} G_p\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ et donc, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} D_{p+1}(x) = x\, D_p'(x) &= x\left[\frac{1}{(1-x)^2} G_p\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{1}{1-x}\frac{1}{(1-x)^2} G_p'\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] \\ &= \frac{1}{1-x}\left[\frac{x}{1-x} G_p\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{x}{(1-x)^2} G_p'\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] \end{aligned}$$

Or, par définition des G_p, on a :

$$G_{p+1}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{x}{1-x}\left[G_p\left(\frac{x}{1-x}\right) + \left(\frac{x}{1-x}+1\right) G_p'\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] = \frac{x}{1-x} G_p\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{x}{(1-x)^2} G_p'\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

Donc, $D_{p+1}(x) = \dfrac{1}{1-x} G_{p+1}\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ et ainsi, la propriété est vraie au rang $p+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$:

$$\boxed{D_p(x) = \frac{1}{1-x} G_p\left(\frac{x}{1-x}\right)}$$

II – Nombres de Fubini

II.A – Dénombrement

Q6. Avec $F_0 = 1$ et la relation de récurrence, on obtient :

$$F_1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{1}{k} F_k = F_0 = 1$$

$$F_2 = \sum_{k=0}^{1} \binom{2}{k} F_k = \binom{2}{0} F_0 + \binom{2}{1} F_1 = F_0 + 2F_1 = 3$$

$$F_3 = \sum_{k=0}^{2} \binom{3}{k} F_k = \binom{3}{0} F_0 + \binom{3}{1} F_1 + \binom{3}{2} F_2 = F_0 + 3F_1 + 3F_2 = 13$$

Ainsi :

$$\boxed{F_1 = 1 \qquad F_2 = 3 \qquad F_3 = 13}$$

Q7. Les parties non vides de $\{1,2,3\}$ sont : $\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}$ et $\{1,2,3\}$, donc :

$$\{1,2,3\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} = \{1,2\} \cup \{3\} = \{1,3\} \cup \{2\} = \{2,3\} \cup \{3\}.$$

Les partitions ordonnées de l'ensemble $\{1,2,3\}$ sont alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} (\{1\},\{2\},\{3\}),\ (\{1\},\{3\},\{2\}), \\ (\{2\},\{1\},\{3\}),\ (\{2\},\{3\},\{1\}), \\ (\{3\},\{2\},\{1\}),\ (\{3\},\{1\},\{2\}), \\ (\{1,2\},\{3\}),\ (\{3\},\{1,2\}), \\ (\{1,3\},\{2\}),\ (\{2\},\{1,3\}), \\ (\{2,3\},\{1\}),\ (\{1\},\{2,3\}), \\ (\{1,2,3\}). \end{array}}$$

Et donc :

$$\boxed{\text{Il y a 13 partitions ordonnées de } \{1,2,3\}.}$$

Q8. Remarquons que le nombre de partitions ordonnées d'un ensemble quelconque de cardinal n est le même que le nombre de partitions ordonnées de $\{1,\ldots,n\}$.

Pour construire une partition ordonnée $(X_1,\ldots,X_p)$ de $\{1,\ldots,n\}$, commençons par choisir k, le cardinal de X_1. Comme X_1 doit être non vide, $k \in [\![1,n]\!]$. Il y a alors $\binom{n}{k}$ possibilités de choisir la partie X_1 de $\{1,\ldots,n\}$.

Pour chacun des $\binom{n}{k}$ choix possibles de X_1, il reste à construire une partition ordonnée $(X_2,\dots,X_p)$ de $\{1,\dots,n\}\setminus X_1$ pour obtenir une partition ordonnée de $\{1,\dots,n\}$. Comme $\mathrm{Card}(\{1,\dots,n\}\setminus X_1)=n-k$, il y a u_{n-k} possibilités de choisir $(X_2,\dots,X_p)$, et donc $\binom{n}{k}u_{n-k}$ possibilités de choisir $(X_1,\dots,X_p)$ avec $\mathrm{Card}\,X_1=k$. Comme $k\in[\![1,n]\!]$, on obtient bien :

$$\boxed{u_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}u_{n-k}}$$

Q9. Par convention, on a $F_0=u_0=1$.

Prouvons par récurrence forte sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=F_n$.

Initialisation :

Pour $n=1$, on a $F_1=1$ et il n'y a qu'une seule partition ordonnée de l'ensemble $\{1\}$: $(\{1\})$.

Ainsi, $u_1=1=F_1$ et la propriété est vraie au rang $n=1$.

Hérédité :

Supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $n\in\mathbb{N}^*$.

Par hypothèse de récurrence, on a $u_k=F_k$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$. Alors, d'après la question précédente et avec une réindexation, on a :

$$u_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}u_{n+1-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{n+1-k}u_k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}u_k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}F_k=F_{n+1}.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit $u_n=F_n$ et comme $F_0=u_0$:

$$\boxed{\text{Les suites } (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont égales.}}$$

II.B – Majoration des nombres de Fubini

Q10. On a $2=e^{\ln 2}=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\ln 2)^k}{k!}=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\ln 2)^k}{k!}$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln 2)^k}{k!}=2-1-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(\ln 2)^k}{k!}=1-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(\ln 2)^k}{k!}.$$

Et comme $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(\ln 2)^k}{k!}\geq 0$, on a bien pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln 2)^k}{k!}\leq 1}$$

Q11. Prouvons par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq \dfrac{F_n}{n!} \leq \dfrac{1}{(\ln 2)^n}$.

Initialisation :

On a $\dfrac{F_0}{0!} = \dfrac{1}{(\ln 2)^0} = 1$, donc $0 \leq \dfrac{F_0}{0!} \leq \dfrac{1}{(\ln 2)^0}$ et la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité :

Supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $n \in \mathbb{N}$.

Par hypothèse de récurrence, on a donc $0 \leq \dfrac{F_k}{k!} \leq \dfrac{1}{(\ln 2)^k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Alors, avec $F_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} F_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n+1-k)!} \frac{F_k}{k!}$, on a :

$$0 \leq F_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n+1-k)!} \frac{1}{(\ln 2)^k} .$$

Or, en réindexant, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n+1-k)!} \frac{1}{(\ln 2)^k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n!}{k!} \frac{1}{(\ln 2)^{n+1-k}} = \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(\ln 2)^k}{k!} .$$

Avec la question précédente, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(\ln 2)^k}{k!} \leq 1$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n+1-k)!} \frac{1}{(\ln 2)^k} \leq \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}$, d'où :

$$0 \leq F_{n+1} \leq \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} .$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{0 \leq \frac{F_n}{n!} \leq \frac{1}{(\ln 2)^n}}$$

Q12. Soit x un réel tel que $|x| < \ln 2$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{F_n}{n!} x^n \right| = \frac{F_n}{n!} |x|^n \leq \frac{|x|^n}{(\ln 2)^n} = \left(\frac{|x|}{\ln 2} \right)^n .$$

Or, comme $|x| < \ln 2$, on a $0 \leq \dfrac{|x|}{\ln 2} < 1$ et la série géométrique $\sum \left(\dfrac{|x|}{\ln 2} \right)^n$ converge, donc par comparaison, la série $\sum \dfrac{F_n}{n!} x^n$ converge absolument, donc converge. Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ tel que } |x| < \ln 2 \text{, la série } \sum \frac{F_n}{n!} x^n \text{ converge.}}$$

II.C – Minoration des nombres de Fubini

Q13. Soit $x \in J = \left]-\ln 2, \ln 2\right[$. On a :

$$2\big(f(x)-1\big) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{F_n}{n!}x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{F_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \text{(en réindexant)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\frac{F_k}{k!}\frac{1}{(n+1-k)!}\right)x^{n+1} \qquad \text{(par défintion de la suite } (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{F_k}{k!}\frac{1}{(n-k)!}\right)x^{n} \qquad \text{(en réindexant à nouveau)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{F_k}{k!}x^k\,\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\right)-1$$

Or, les séries $\sum\frac{F_n}{n!}x^n$ et $\sum\frac{x^n}{n!}$ convergent absolument (d'après la question précédente avec $|x|<\ln 2$ pour la première et pour tout réel *x* pour la seconde), donc on peut utiliser le produit de Cauchy, qui donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{F_k}{k!}x^k\,\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{F_n}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\right) = f(x)e^x.$$

Et ainsi, on a bien pour tout $x \in J$:

$$\boxed{2\big(f(x)-1\big) = e^x f(x)-1}$$

Q14. Pour tout $x \in J$, $x \neq \ln 2$, donc $2-e^x \neq 0$ et :

$$2\big(f(x)-1\big) = e^x f(x)-1 \quad\Leftrightarrow\quad 2f(x)-e^x f(x) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad f(x) = \frac{1}{2-e^x}.$$

Ainsi, f est l'inverse d'une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas sur *J*, donc :

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } J.}$$

On a de plus, pour tout $x \in J$:

$$f'(x) = -\frac{-e^x}{(2-e^x)^2} = \frac{e^x}{2-e^x}f(x) = \frac{1}{2e^{-x}-1}f(x).$$

Prouvons alors par récurrence sur *k* que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in J$:

$$f^{(k)}(x) = G_k\left(\frac{1}{2e^{-x}-1}\right)f(x).$$

Initialisation :

On a pour tout $x\in J$, $f^{(0)}(x)=f(x)=G_0\left(\dfrac{1}{2e^{-x}-1}\right)f(x)$, car $G_0=1$, donc la propriété est vraie au rang $k=0$.

Hérédité :

Supposons la propriété vraie à un rang $k\in\mathbb{N}$, soit $f^{(k)}(x)=G_k\left(\dfrac{1}{2e^{-x}-1}\right)f(x)$. En dérivant, on obtient :

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x)&=-\frac{-2e^{-x}}{(2e^{-x}-1)^2}G_k'\left(\frac{1}{2e^{-x}-1}\right)f(x)+G_k\left(\frac{1}{2e^{-x}-1}\right)f'(x)\\
&=\frac{2e^{-x}}{(2e^{-x}-1)^2}G_k'\left(\frac{1}{2e^{-x}-1}\right)f(x)+G_k\left(\frac{1}{2e^{-x}-1}\right)\frac{1}{2e^{-x}-1}f(x)\\
&=\frac{1}{2e^{-x}-1}\left[G_k\left(\frac{1}{2e^{-x}-1}\right)+\frac{2e^{-x}}{2e^{-x}-1}G_k'\left(\frac{1}{2e^{-x}-1}\right)\right]f(x)\\
&=\frac{1}{2e^{-x}-1}\left[G_k\left(\frac{1}{2e^{-x}-1}\right)+\left(\frac{1}{2e^{-x}-1}+1\right)G_k'\left(\frac{1}{2e^{-x}-1}\right)\right]f(x)
\end{aligned}$$

Or, $G_{k+1}=X\left(G_k+(X+1)G_k'\right)$, donc :

$$f^{(k+1)}(x)=G_{k+1}\left(\frac{1}{2e^{-x}-1}\right)f(x).$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k\in\mathbb{N}$, soit pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in J$:

$$\boxed{f^{(k)}(x)=G_k\left(\frac{1}{2e^{-x}-1}\right)f(x)}$$

Q15. On admet que pour tout $x\in J$ et tout $k\in\mathbb{N}$, on a $f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n^{(k)}(x)$ avec $f_n : x\mapsto \dfrac{F_n}{n!}x^n$.

Or, si $k>n$, $f_n^{(k)}=0$ et si $k\leq n$, $f_n^{(k)} : x\mapsto \dfrac{F_n}{(n-k)!}x^{n-k}$, donc :

$$f_n^{(k)}(0)=\begin{cases}0 & \text{si } n\neq k\\ F_k & \text{si } n=k\end{cases}$$

Ainsi, $f^{(k)}(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n^{(k)}(0)=f_k^{(k)}(0)=F_k$, autrement dit :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ f^{(n)}(0)=F_n.}$$

D'après la question précédente, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)=G_n\left(\dfrac{1}{2-1}\right)f(0)=G_n(1)f(0)$.

On a $f(0)=F_0=1$ et, d'après la question **Q5**, on a $D_n(x)=\dfrac{1}{1-x}G_n\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ pour tout $x\in I=\left]-1,1\right[$. En particulier pour $x=\dfrac{1}{2}$, on obtient $D_n\left(\dfrac{1}{2}\right)=2G_n(1)$, soit :

$$F_n=f^{(n)}(0)=G_n(1)f(0)=\frac{1}{2}D_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}k^n\left(\frac{1}{2}\right)^k .$$

Et ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{F_n=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{2^k}}$$

Q16. Soit $n\in\mathbb{N}$.

Si $n=0$, $h_0:t\mapsto e^{-t\ln 2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc admet $h_0(0)=1$ pour maximum sur $\mathbb{R}_+$.

Si $n\geq 1$, h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produite de telles fonctions, de dérivée $h_n':t\mapsto\big(n-(\ln 2)t\big)t^{n-1}e^{-t\ln 2}$.

Alors, $h_n'>0$ sur $\left]0,\dfrac{n}{\ln 2}\right[$ et $h_n'<0$ sur $\left]\dfrac{n}{\ln 2},+\infty\right[$, donc h_n est strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{n}{\ln 2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{n}{\ln 2},+\infty\right[$. Ceci permet de conclure que :

$$\boxed{h_n \text{ admet un maximum sur } \mathbb{R}_+\text{, qui est } M_n=h_n\left(\frac{n}{\ln 2}\right)=\left(\frac{n}{e\ln 2}\right)^n .}$$

Remarquons qu'avec $0^0=1$ l'expression ci-dessus reste vraie pour $n=0$.

Q17. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}_+$. On a $\lfloor t\rfloor\in\mathbb{N}$ et avec la question **Q15** :

$$2F_n=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{2^k}=\sum_{k=0}^{\lfloor t\rfloor}\frac{k^n}{2^k}+\sum_{k=\lfloor t\rfloor+1}^{+\infty}\frac{k^n}{2^k}\geq\sum_{k=\lfloor t\rfloor+1}^{+\infty}\frac{k^n}{2^k}$$

car $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor t\rfloor}\frac{k^n}{2^k}\geq 0$.

Et pour tout entier $k\geq\lfloor t\rfloor+1$, on a $k\geq t\geq 0$, donc $k^n\geq t^n$. Comme la série géométrique $\displaystyle\sum\frac{1}{2^k}$ converge, on peut alors écrire :

$$2F_n\geq\sum_{k=\lfloor t\rfloor+1}^{+\infty}\frac{t^n}{2^k}=t^n\sum_{k=\lfloor t\rfloor+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=t^n\frac{\dfrac{1}{2^{\lfloor t\rfloor+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}=\frac{t^n}{2^{\lfloor t\rfloor}}$$

Enfin, $h_n(t) = \dfrac{t^n}{2^t}$ et $t \geq \lfloor t \rfloor$, donc $\dfrac{1}{2^{\lfloor t \rfloor}} \leq \dfrac{1}{2^t}$ et ainsi, $\dfrac{t^n}{2^{\lfloor t \rfloor}} \leq h_n(t)$.

En définitive, on obtient bien pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{2F_n \geq \sum_{k=\lfloor t \rfloor+1}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k} \geq \frac{t^n}{2^{\lfloor t \rfloor}} \geq h_n(t)}$$

Q18. A $n \in \mathbb{N}$ fixé, l'inégalité $2F_n \geq h_n(t)$ obtenue ci-dessus est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et en particulier pour $t = \dfrac{n}{\ln 2}$, ce qui donne $2F_n \geq h_n\left(\dfrac{n}{\ln 2}\right) = \left(\dfrac{n}{e \ln 2}\right)^n$, soit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{F_n \geq \frac{1}{2}\left(\frac{n}{e \ln 2}\right)^n}$$

III – Équivalent de F_n

III.A – Valeur d'une intégrale

Q19. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, à l'aide d'une intégration par parties, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
(\ln 2)\, H_{n+1}(x) = (\ln 2) \int_0^x h_{n+1}(t)\, dt &= \int_0^x t^{n+1} (\ln 2)\, e^{-t \ln 2}\, dt \\
&= \left[t^{n+1} (-e^{-t \ln 2}) \right]_0^x - \int_0^x (n+1)\, t^n (-e^{-t \ln 2})\, dt \\
&= -x^{n+1} e^{-x \ln 2} + (n+1) \int_0^x t^n e^{-t \ln 2}\, dt \\
&= -h_{n+1}(x) + (n+1) \int_0^x h_n(t)\, dt
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{(\ln 2)\, H_{n+1}(x) = (n+1) H_n(x) - h_{n+1}(x)}$$

Q20. Prouvons par récurrence sur *n* que $H_n(x)$ admet une limite finie quand *x* tend vers $+\infty$.

Initialisation :

Pour $n = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$H_0(x) = \int_0^x h_0(t)\, dt = \int_0^x e^{-t \ln 2}\, dt = \left[-\frac{1}{\ln 2} e^{-t \ln 2} \right]_0^x = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} e^{-x \ln 2}.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} H_0(x) = \frac{1}{\ln 2}$ et la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité :

Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ et notons $\lim\limits_{x \to +\infty} H_n(x) = L_n$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} h_{n+1}(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x \ln 2} = 0$ par croissances comparées, on a alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(n+1)H_n(x) - h_{n+1}(x)}{\ln 2} = \frac{n+1}{\ln 2} L_n .$$

Avec la relation de la question précédente, cela signifie que $H_{n+1}(x)$ admet une limite finie L_{n+1} quand x tend vers $+\infty$ et, ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, quand x tend vers $+\infty$, $H_n(x)$ admet une limite finie L_n et on a établi que $L_0 = \dfrac{1}{\ln 2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} = \dfrac{n+1}{\ln 2} L_n$.

Cette dernière relation se récrit $\dfrac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!} L_{n+1} = \dfrac{(\ln 2)^n}{n!} L_n$, donc la suite $\left(\dfrac{(\ln 2)^n}{n!} L_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, soit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(\ln 2)^n}{n!} L_n = \frac{(\ln 2)^0}{0!} L_0 = \frac{1}{\ln 2} \quad \Leftrightarrow \quad L_n = \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} .$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} H_n(x) = \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}}$$

On note alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(t)\, dt = \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}$.

III.B – Comparaison série/intégrale

Q21. On a vu que dans la question **Q16** que h_n est croissante sur $\left[0, \dfrac{n}{\ln 2}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{n}{\ln 2}, +\infty\right[$.

En posant $N = \left\lfloor \dfrac{n}{\ln 2} \right\rfloor$, on a $N \geq \left\lfloor \dfrac{1}{\ln 2} \right\rfloor \geq 1$, $[0, N] \subset \left[0, \dfrac{n}{\ln 2}\right]$ et $[N+1, +\infty[\subset \left[\dfrac{n}{\ln 2}, +\infty\right[$, donc :

$$\boxed{h_n \text{ est croissante sur } [0, N] \text{ et décroissante sur } [N+1, +\infty[.}$$

Q22. Pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, on a pour tout $t \in [k, k+1] \subset [0, N]$, $h_n(k) \le h_n(t) \le h_n(k+1)$, donc :

$$h_n(k) \le \int_0^N h_n(t)\,dt \le h_n(k+1).$$

En sommant de $k=0$ à $k=N-1$ et en réindexant le membre de droite, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{N-1} h_n(k) \le \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} h_n(t)\,dt \le \sum_{k=0}^{N-1} h_n(k+1) = \sum_{k=1}^{N} h_n(k).$$

Soit, avec la relation de Chasles :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N-1} h_n(k) \le \int_0^N h_n(t)\,dt \le \sum_{k=1}^{N} h_n(k)}$$

Q23. Par croissances comparées, on a $h_n(k) = \dfrac{k^n}{2^k} = \underset{k\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ et la série $\sum \dfrac{1}{k^2}$ converge donc, par comparaison :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k \ge N+1} h_n(k) \text{ converge.}}$$

En raisonnant comme dans la question précédente, mais en prenant $k \ge N+1$, donc h_n est décroissante sur $[k, k+1] \subset [N+1, +\infty[$, puis en sommant de $k = N+1$ à l'infinie (tout converge d'après le résultat précédent et la question **Q20**), on obtient :

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} h_n(k+1) \le \int_{N+1}^{+\infty} h_n(t)\,dt \le \sum_{k=N+1}^{+\infty} h_n(k).$$

Soit en réindexant le membre de gauche :

$$\boxed{\sum_{k=N+2}^{+\infty} h_n(k) \le \int_{N+1}^{+\infty} h_n(t)\,dt \le \sum_{k=N+1}^{+\infty} h_n(k)}$$

Q24. D'après la question **Q15**, on a $2F_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} h_n(k)$.

D'après la question **Q20**, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(t)\,dt = \int_0^N h_n(t)\,dt + \int_N^{N+1} h_n(t)\,dt + \int_{N+1}^{+\infty} h_n(t)\,dt = \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}$.

En additionnant les doubles inégalités obtenues dans les deux questions précédentes, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{N-1} h_n(k) + \sum_{k=N+2}^{+\infty} h_n(k) \le \int_0^N h_n(t)\,dt + \int_{N+1}^{+\infty} h_n(t)\,dt \le \sum_{k=1}^{N} h_n(k) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} h_n(k).$$

Soit :

$$2F_n - h_n(N) - h_n(N+1) \le \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} - \int_N^{N+1} h_n(t)\,dt \le 2F_n.$$

Ceci se récrit :

$$\boxed{-\int_N^{N+1} h_n(t)\,dt \leq 2F_n - \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} \leq h_n(N) + h_n(N+1) - \int_N^{N+1} h_n(t)\,dt}$$

Q25. Comme pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq h_n(t) \leq M_n$, on a $h_n(N) \leq M_n$, $h_n(N+1) \leq M_n$ et :

$$0 \leq \int_N^{N+1} h_n(t)\,dt \leq \int_N^{N+1} M_n dt = M_n.$$

Donc $h_n(N) + h_n(N+1) - \int_N^{N+1} h_n(t)\,dt \leq 2M_n$ et $-M_n \leq -\int_N^{N+1} h_n(t)\,dt$, et le résultat donne alors :

$$\boxed{-M_n \leq 2F_n - \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} \leq 2M_n}$$

On a établi que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} - M_n \leq 2F_n \leq \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} + 2M_n.$$

Avec $M_n = \left(\frac{n}{e\ln 2}\right)^n$ et la formule de Stirling, on a :

$$\frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{(\ln 2)^{n+1}} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{\ln 2} M_n.$$

Donc $M_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}\right)$ et ainsi :

$$\frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} - M_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} + 2M_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}.$$

Le théorème des gendarmes appliqué aux équivalents donne alors $2F_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}$ et donc :

$$\boxed{F_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}}}$$

IV – Une suite d'Appell

IV.A – Étude d'un endomorphisme

Q26. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ non nul ($d \in \mathbb{N}$ et $a_d \neq 0$).

- Si $d = 0$, alors $P(X+1) = P(X) = a_0$.

- Si $d \geq 1$, alors :
$$P(X+1)=\sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k = a_d (X+1)^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k (X+1)^k = a_d X^d + Q(X)$$
avec $Q(X)=a_d \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d}{k} X^k + \sum_{k=0}^{d-1} a_k (X+1)^k \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$.

Donc, dans les deux cas, le terme de plus haut degré de $P(X+1)$ est $a_d X^d$, celui de P.

Ainsi :

$\boxed{P \text{ et } P(X+1) \text{ ont le même degré et le même coefficient dominant.}}$

Q27. Pour tous $P,Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda P+Q)(X+1)=\lambda P(X+1)+Q(X+1)$, donc $P \mapsto P(X+1)$ est linéaire, et ainsi, φ_n est linéaire comme combinaison linéaire d'application linéaires.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, P et $P(X+1)$ ont le même terme de plus haut degré. Notons-le $a_d X^d$. Alors, le terme de plus haut degré de $\varphi_n(P)=2P(X)-P(X+1)$ est $2a_d X^d - a_d X^d = a_d X^d$. Ceci prouve que $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, et $\varphi_n(P)$ et P ont même degré et même coefficient dominant.

Ainsi :

$\boxed{\varphi_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

Q28. D'après ce que l'on vient de voir, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul, on a $\deg(\varphi_n(P)) = \deg P \geq 0$, donc $\varphi_n(P) \neq 0$. Ainsi, $\varphi_n(P)=0$ si et seulement si $P=0$, donc $\ker \varphi_n = \{0\}$ et ainsi :

$\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi_n \text{ est injectif.}}$

Q29. Comme φ_n est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension finie, φ_n est bijectif, donc surjectif. Alors, pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi_n(P)=Q$. En particulier pour $Q = X^n \in \mathbb{R}_n[X]$:

$\boxed{\text{Il existe un unique polynôme } P_n \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } \varphi_n(P_n) = 2P_n(X) - P_n(X+1) = X^n.}$

IV.B – Premières propriétés des P_n

Q30. On a vu dans la partie précédente que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(\varphi_n(P)) = \deg P$, donc $\deg P_n = \deg(\varphi_n(P_n)) = \deg X^n$, soit :

$\boxed{\deg P_n = n}$

Q31. Par définition de P_n, on a $2P_n(X)-P_n(X+1)=X^n$, donc pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$2P_n(k)-P_n(k+1)=k^n.$$

En divisant par 2^k, on obtient pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\frac{k^n}{2^k}=\frac{P_n(k)}{2^{k-1}}-\frac{P_n(k+1)}{2^k}}$$

D'après la question **Q15**, on a $F_n=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{2^k}$. Avec la relation ci-dessus, ceci donne :

$$F_n=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{P_n(k)}{2^{k-1}}-\frac{P_n(k+1)}{2^k}\right)$$

Or, si α_n est le coefficient dominant de P_n, on a avec $\deg P_n=n$:

$$\frac{P_n(k+1)}{2^k}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{\alpha_n k^n}{2^k}$$

Alors, $\lim_{k\to+\infty}\frac{P_n(k+1)}{2^k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\alpha_n k^n}{2^k}=0$ par croissances comparées et avec un télescopage dans la formule de F_n ci-dessus, on obtient $F_n=\frac{1}{2}\left(\frac{P_n(0)}{2^{-1}}-\lim_{k\to+\infty}\frac{P_n(k+1)}{2^k}\right)$, soit :

$$\boxed{F_n=P_n(0)}$$

Q32. On a $2P_n(X)-P_n(X+1)=X^n$ et $2P_{n+1}(X)-P_{n+1}(X+1)=X^{n+1}$. En dérivant la seconde relation, on obtient :

$$2P_{n+1}'(X)-P_{n+1}'(X+1)=(n+1)X^n=(n+1)\big(2P_n(X)-P_n(X+1)\big).$$

Donc :

$$2\big(P_{n+1}'(X)-(n+1)P_n(X)\big)-\big(P_{n+1}'(X+1)-(n+1)P_n(X+1)\big)=0.$$

Soit $\varphi_n\big(P_{n+1}'(X)-(n+1)P_n(X)\big)=0$, soit $P_{n+1}'-(n+1)P_n\in\ker\varphi_n$. Or, d'après la question **Q15**, $\ker\varphi_n=\{0\}$, donc $P_{n+1}'-(n+1)P_n=0$, soit :

$$\boxed{P_{n+1}'=(n+1)P_n}$$

Q32. La formule de Taylor pour les polynômes appliquée à P_n donne $P_n=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}X^k$.

Comme $\deg P_n=n$, on a $P_n^{(k)}=0$ quand $k>n$, donc :

$$P_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}X^k.$$

On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}' = (n+1)P_n$, donc

- pour $n \geq 1$, on a $P_n' = nP_{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!}P_{n-1}$;
- pour $n \geq 2$, $P_n^{(2)} = nP_{n-1}' = n\big((n-1)P_{n-2}\big) = \dfrac{n!}{(n-2)!}P_{n-2}$.
- …

On conjecture que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $P_n^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}$.

- On a $P_n^{(0)} = P_n = \dfrac{n!}{(n-0)!}P_{n-0}$ et la relation est vraie au rang $k = 0$.
- Si pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ (quand $n \geq 1$), on a $P_n^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}$, alors :

$$P_n^{(k+1)} = \frac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}' = \frac{n!}{(n-k)!}(n-k)P_{n-k-1} = \frac{n!}{\big(n-(k+1)\big)!}P_{n-(k+1)}.$$

  Donc, la relation est vraie au rang $k+1$.

La propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Alors, avec la question **Q31**, on obtient pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$P_n^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}(0) = \frac{n!}{(n-k)!}F_{n-k}.$$

Et ainsi, $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{n!}{(n-k)!}F_{n-k}X^k$, soit :

$$\boxed{P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{n-k}X^k}$$

IV.C – Structure euclidienne

Q34. On a vu dans la question **Q30** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$, donc $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille échelonnée en degrés de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\boxed{\text{Il existe un unique } (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } P = a_0P_0 + a_1P_1 + \dots + a_nP_n.}$$

Q35. Soient $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $j \in \mathbb{N}$. Par linéarité de la dérivation, on a :

$$\big(\varphi_n(P)\big)^{(j)} = \big(2P(X) - P(X+1)\big)^{(j)} = 2P^{(j)}(X) - P^{(j)}(X+1)$$

Soit :

$$\boxed{\big(\varphi_n(P)\big)^{(j)} = \varphi_n\left(P^{(j)}\right)}$$

Pour tous $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$, on peut donc écrire $\langle P,Q\rangle=\sum_{j=0}^{n}\dfrac{\left((\varphi_n(P))^{(j)}(0)\right)\left((\varphi_n(Q))^{(j)}(0)\right)}{(j!)^2}$.

L'application $(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle$ est bien définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Elle est symétrique par commutativité du produit et bilinéaire par linéarité de Σ, de φ_n et de la dérivation (on a $(\varphi_n(P+\lambda Q))^{(j)}=(\varphi_n(P)+\lambda\varphi_n(Q))^{(j)}=(\varphi_n(P))^{(j)}+(\lambda\varphi_n(Q))^{(j)}$ pour tous $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$, tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et tout $j\in[\![0,n]\!]$).

De plus, pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle P,P\rangle=\sum_{j=0}^{n}\frac{\left((\varphi_n(P))^{(j)}(0)\right)^2}{(j!)^2}\geq 0.$$

Sachant qu'une somme de réels au carré est nulle si et seulement si chaque terme de la somme est nul, on a avec $\varphi_n(P)\in\mathbb{R}_n[X]$ et la formule de Taylor pour les polynômes rappelée plus haut :

$$\langle P,P\rangle=0 \iff \forall j\in[\![0,n]\!],\ (\varphi_n(P))^{(j)}(0)=0 \iff \varphi_n(P)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(\varphi_n(P))^{(j)}(0)}{j!}X^j=0.$$

Et comme l'application φ_n est injective, ceci donne :

$$\langle P,P\rangle=0 \iff P=0.$$

Ainsi, $(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive sur $\mathbb{R}_n[X]$, donc :

$$\boxed{\text{L'application } (P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle \text{ définit un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X].}$$

Q36. Soit $(j,k)\in\mathbb{N}^2$. On a $2P_k^{(j)}(0)-P_k^{(j)}(1)=\varphi_k\left(P_k^{(j)}\right)(0)$ et :

$$\varphi_k\left(P_k^{(j)}\right)=(\varphi_k(P_k))^{(j)}=\left(X^k\right)^{(j)}=\begin{cases}\left(\dfrac{k!}{(k-j)!}X^{k-j}\right) & \text{si } j\leq k\\ 0 & \text{si } j>k\end{cases}$$

Et comme, en 0, X^{k-j} vaut 0 quand $j<k$ et 1 quand $j=k$, on obtient bien :

$$\boxed{2P_k^{(j)}(0)-P_k^{(j)}(1)=\begin{cases}0 & \text{si } j\neq k\\ k! & \text{si } j=k\end{cases}=\delta_{j,k}k!}$$

Q37. On a vu dans la question **Q34** que la famille $\left(P_0, P_1, \dots, P_n\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Reste à prouver qu'elle est orthonormée pour le produit scalaire $\left(P,Q\right) \mapsto \left\langle P,Q\right\rangle$.

Pour tous $k,k' \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}\left\langle P_k, Q_k\right\rangle &= \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(2P_k^{(j)}(0) - P_k^{(j)}(1)\right)\left(2P_{k'}^{(j)}(0) - P_{k'}^{(j)}(1)\right)}{(j!)^2} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(\delta_{j,k} k!\right)\left(\delta_{j,k'}(k')!\right)}{(j!)^2} = \frac{k!\left(\delta_{k,k'}(k')!\right)}{(k!)^2} = \delta_{k,k'}\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\left(P_0, P_1, \dots, P_n\right)$ est orthonormée pour le produit scalaire $\left(P,Q\right) \mapsto \left\langle P,Q\right\rangle$ et donc :

$$\boxed{\left(P_0, P_1, \dots, P_n\right) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_n[X] \text{ pour le produit scalaire } \left(P,Q\right) \mapsto \left\langle P,Q\right\rangle.}$$

Q38. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut alors écrire $P = \sum_{k=0}^{n} \left\langle P_k, P\right\rangle P_k$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned}\left\langle P_k, P\right\rangle &= \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(2P_k^{(j)}(0) - P_k^{(j)}(1)\right)\left(2P^{(j)}(0) - P^{(j)}(1)\right)}{(j!)^2} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(\delta_{j,k} k!\right)\left(\left(\varphi_n(P)\right)^{(j)}(0)\right)}{(j!)^2} = \frac{k!\left(\left(\varphi_n(P)\right)^{(k)}(0)\right)}{(k!)^2} = \frac{\left(\varphi_n(P)\right)^{(k)}(0)}{k!}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\varphi_n(P)\right)^{(k)}(0)}{k!} P_k}$$