Corrigé du DM n° 2

1) L'entier $p\in\mathbb{N}^*$ est fixé. La série $\sum\frac{(-1)^k}{k^p}$ est alternée et la suite $\left(\frac{1}{k^p}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ décroît vers 0. Donc la série $\sum\frac{(-1)^k}{k^p}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc elle converge.

Ainsi, pour tour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n^{(p)}=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^p}$ est le reste d'une série convergente, donc :

$$\boxed{\text{La suite } \left(u_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bien définie.}}$$

2) Comme la série $\sum\frac{(-1)^k}{k^p}$ vérifie le critère spécial des séries alternées et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n^{(p)}$ est le reste d'ordre $n-1$ de cette série, il est du signe du premier terme de la somme et $\left|u_n^{(p)}\right|\le\frac{1}{n^p}$. Si $p\ge 2$, la série $\sum\frac{1}{n^p}$ converge, donc par comparaison, la série $\sum_{n\ge1}u_n^{(p)}$ converge absolument, donc :

$$\boxed{\text{Quand } p\ge 2\text{, la série } \sum_{n\ge1}u_n^{(p)} \text{ converge.}}$$

3) La série $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n^{(1)}=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ est du signe de son premier terme, qui est $\frac{(-1)^n}{n}$ (donc du signe de $(-1)^n$), et :

$$\begin{aligned}\left|u_n^{(1)}\right|=(-1)^n u_n^{(1)}&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\dots\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+2k}-\frac{1}{n+2k+1}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2k)(n+2k+1)}\end{aligned}$$

La fonction $f:t\mapsto\frac{1}{(n+2t)(n+2t+1)}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc, par comparaison série-intégrale, on peut écrire pour tout $N\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{N}f(k+1)\le\sum_{k=0}^{N}\int_k^{k+1}f(t)\,dt\le\sum_{k=0}^{N}f(k)\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{k=0}^{N+1}f(k)-f(0)\le\int_0^{N+1}f(t)\,dt\le\sum_{k=0}^{N}f(k)\quad\textbf{(*)}$$

Or, la série $\sum f(k)$ converge et sa somme vaut $\sum_{k=0}^{+\infty}f(k)=\left|u_n^{(1)}\right|$.

De plus, $f(0)=\dfrac{1}{n(n+1)}$ et :

$$\int_0^{N+1} f(t)\,dt=\int_0^{N+1}\left(\frac{1}{n+2t}-\frac{1}{n+2t+1}\right)dt=\left[-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+2t+1}{n+2t}\right)\right]_0^{N+1}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n+2N+2}\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi, en passant à la limite quand $N\to+\infty$ dans **(*)**, on obtient :

$$\left|u_n^{(1)}\right|-\frac{1}{n(n+1)}\leq\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\left|u_n^{(1)}\right|.$$

Soit :

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\left|u_n^{(1)}\right|\leq\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Avec $\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\dfrac{1}{n(n+1)}=O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, on obtient $\left|u_n^{(1)}\right|=\dfrac{1}{2n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et donc :

$$\boxed{u_n^{(1)}=(-1)^n\left|u_n^{(1)}\right|=\frac{(-1)^n}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

La série $\sum\dfrac{(-1)^n}{2n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc converge et la série $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq1}u_n^{(1)} \text{ converge.}}$$

On a vu que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n^{(1)}$ est du signe de $(-1)^n$, donc la série $\sum\limits_{n\geq1}u_n^{(1)}$ est alternée.

De plus, $u_n^{(1)}$ est le reste d'une série convergente, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n^{(1)}=0$.

Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$\left|u_{n+1}^{(1)}\right|-\left|u_n^{(1)}\right|=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1+2k)(n+1+2k+1)}-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2k)(n+2k+1)}$$
$$=-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+2k)(n+2k+1)(n+2k+2)}$$

Donc, $\left|u_{n+1}^{(1)}\right|-\left|u_n^{(1)}\right|<0$ et la suite $\left(\left|u_n^{(1)}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Ceci permet de conclure que :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq1}u_n^{(1)} \text{ vérifie le critère spécial des séries alternées.}}$$

Remarque : Ceci implique que $S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(1)}$ est du signe de son premier terme, $u_1^{(1)}$, qui est lui-même du signe de $(-1)^1$, donc $S_1 < 0$. Cette question permet donc de déceler l'erreur d'énoncé qui est dans la question 6 : S_1 ne peut être égal à $\frac{1}{2}$.

D'après les questions 2 et 3, S_p est définie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

4) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et un entier $N \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} u_n^{(p+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} + \sum_{n=2}^{N} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} + \sum_{n=2}^{N} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} + \sum_{n=2}^{N} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} \right) - \sum_{n=2}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} \right) - \sum_{1 \leq k < n \leq N} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} \\
&= N \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^{N} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} \\
&= N \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} - \sum_{k=1}^{N-1} (N-k) \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} \\
&= N \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} - N \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k^{p}} \\
&= N \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} \right) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{p}} - \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{p}} \\
&= N \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{p+1}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{p}} - \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{p}}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} u_n^{(p+1)} = N\, u_N^{(p+1)} + u_1^{(p)} - u_N^{(p)}}$$

5) On a vu que quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge, de somme S_p.

Ceci implique que $\lim_{n \to +\infty} u_n^{(p)} = 0$ et donc que :

$$\lim_{N \to +\infty} N\, u_N^{(p+1)} = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} u_n^{(p+1)} - u_1^{(p)} + u_N^{(p)} \right) = S_{p+1} - u_1^{(p)}.$$

Si $K = S_{p+1} - u_1^{(p)} \neq 0$, alors on peut écrire $u_N^{(p+1)} \underset{N \to +\infty}{\sim} \dfrac{K}{N}$. Ceci est absurde car la série $\sum u_n^{(p+1)}$ converge, mais la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, donc $S_{p+1} - u_1^{(p)} = 0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } \left(N u_N^{(p+1)}\right)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers 0 et } S_{p+1} = u_1^{(p)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^p}.}$$

6) En prenant $p = 0$ dans le calcul fait dans la question 4, on obtient pour tout entier $N \geq 2$:

$$\sum_{n=1}^{N} u_n^{(1)} = N \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k = N u_N^{(1)} + (-1)\frac{1-(-1)^{N-1}}{1-(-1)} = N u_N^{(1)} - \frac{(-1)^N}{2} - \frac{1}{2}.$$

Or, on a vu dans la question 3 que $u_N^{(1)} = \dfrac{(-1)^N}{2N} + O\left(\dfrac{1}{N^2}\right)$, donc $N u_N^{(1)} = \dfrac{(-1)^N}{2} + O\left(\dfrac{1}{N}\right)$ et :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n^{(1)} = -\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

On a alors :

$$\boxed{S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(1)} = -\frac{1}{2}}$$

Et non $S_1 = \dfrac{1}{2}$ *...*

7) On admet que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. En notant γ sa limite et en posant $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, on peut écrire :

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

D'après la question 5, on a $S_2 = u_1^{(1)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= H_n - H_{2n} = \big(\ln n + \gamma + o(1)\big) - \big(\ln(2n) + \gamma + o(1)\big) \\
&= \ln n - \ln(2n) + o(1) = -\ln 2 + o(1)
\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$, soit :

$$\boxed{S_2 = -\ln 2}$$

8) a. Soient $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ (donc $\cos t\neq 0$) et $n\in\mathbb{N}$. Avec la formule de Moivre, on a :

$$\begin{aligned}\cos\big((2n+1)t\big) &= \mathrm{Re}\left[e^{i(2n+1)t}\right]=\mathrm{Re}\left[(e^{it})^{2n+1}\right]=\mathrm{Re}\left[(\cos t+i\sin t)^{2n+1}\right]\\ &=\mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(\cos t)^{2n+1-k}(i\sin t)^k\right]=\left(\cos^{2n+1}t\right)\mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}i^k\binom{2n+1}{k}\tan^k t\right]\\ &=\left(\cos^{2n+1}t\right)\sum_{k=0,k\ pair}^{2n+1}i^k\binom{2n+1}{k}\tan^k t=\left(\cos^{2n+1}t\right)\sum_{k=0}^{n}i^{2k}\binom{2n+1}{2k}\tan^{2k}t\\ &=\left(\cos^{2n+1}t\right)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k}(\tan^2 t)^k\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\frac{\cos\big((2n+1)t\big)}{\cos^{2n+1}t}=P_n\left(\tan^2 t\right)\ \text{avec}\ P_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k}X^k\ .}$$

b. Remarquons que $P_n=(-1)^n(2n+1)X^n+(-1)^{n-1}\dfrac{n(2n+1)(2n-1)}{3}X^{n-1}+\ldots$, donc $\deg P_n=n$, et P_n admet au plus n racines réelles ou complexes distinctes.

Pour $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$P_n\left(\tan^2 t\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad\cos\big((2n+1)t\big)=0\quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}\ \text{avec}\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

Or, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, on a $0<\dfrac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}<\dfrac{\pi}{2}$, donc les réels $\tan^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}\right)$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$ sont distincts deux à deux et racines de P_n. Ainsi :

$$\boxed{P_n\ \text{admet}\ n\ \text{racines réelles distinctes : les}\ \tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}\right)\ \text{pour}\ k\in[\![0,n-1]\!].}$$

Les coefficients de X^n et X^{n-1} dans le polynôme P_n sont respectivement $(-1)^n(2n+1)$ et $(-1)^{n-1}\dfrac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$, donc la somme des racines de P_n est $-\dfrac{(-1)^{n-1}\dfrac{n(2n+1)(2n-1)}{3}}{(-1)^n(2n+1)}$.

Une fois simplifiée :

$$\boxed{\text{La somme des racines de}\ P_n\ \text{est}\ \sum_{k=0}^{n-1}\tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}\right)=\frac{n(2n-1)}{3}\,.}$$

c. Sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction cotan est convexe et la fonction cos est concave.

Alors, pour tout $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$:

- $\cos t \le \cos'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}-t$;
- $\operatorname{cotan} t \ge \operatorname{cotan}'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)+\operatorname{cotan}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)+\operatorname{cotan}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}-t$.

Ainsi, pour tout $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$0<\cos t\le\frac{\pi}{2}-t\le\operatorname{cotan} t.$$

En passant aux carrés des inverses, on obtient :

$$\boxed{\tan^2 t=\frac{1}{\operatorname{cotan}^2 t}\le\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^{-2}\le\frac{1}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t}$$

d. On a vu que pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, on a $\dfrac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc :

$$\tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}\right)\le\left(\frac{\pi}{2}-\frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}\right)^{-2}=\frac{1}{\pi^2}\frac{(2n+1)^2}{(n-k)^2}\le1+\tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}\right).$$

En sommant de $k=0$ à $k=n-1$ et, avec la question b, on obtient :

$$\frac{n(2n-1)}{3}\le\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n-k)^2}\le n+\frac{n(2n-1)}{3}=\frac{n(2n+2)}{3}.$$

Soit :

$$\frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}\pi^2\le\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n-k)^2}\le\frac{n(2n+2)}{3(2n+1)^2}\pi^2.$$

En réindexant, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n-k)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et donc :

$$\pi^2\frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\le\pi^2\frac{n(2n+2)}{3(2n+1)^2}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\pi^2\frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}=\lim_{n\to+\infty}\pi^2\frac{n(2n+2)}{3(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

D'après la question 5, on a :

$$S_3 = u_1^{(2)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Comme la série positive $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, les séries $\sum_{k=1,\ k\ pair} \frac{1}{k^2}$ et $\sum_{k=1,\ k\ impair} \frac{1}{k^2}$ convergent aussi, et on peut écrire :

$$S_3 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1,\ k\ pair}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1,\ k\ impair}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 2 \sum_{k=1,\ k\ pair}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Et ainsi :

$$\boxed{S_3 = -\frac{\pi^2}{12}}$$