Corrigé du DM n° 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $T_n = tr(A_n) = Z_1 + ... + Z_n$.

T_n est une fonction de $Z_1, ..., Z_n$, qui sont des variables aléatoires, donc :

$$\boxed{T_n \text{ est une variable aléatoire.}}$$

Les variables $Z_1, ..., Z_n$ sont indépendantes et suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p, donc :

$$\boxed{T_n = Z_1 + ... + Z_n \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p.}$$

On a alors :

$$\boxed{E(T_n) = np \text{ et } V(T_n) = np(1-p).}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. En développant par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$D_n = \begin{vmatrix} Z_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & Z_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & Z_{n-1} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & Z_n \end{vmatrix}_n = Z_n \begin{vmatrix} Z_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & Z_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & Z_{n-2} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & Z_{n-1} \end{vmatrix}_{n-1} - \begin{vmatrix} Z_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & Z_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & Z_{n-2} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}.$$

Puis en développant par rapport à la dernière ligne de second déterminant $n-1$, on obtient :

$$\boxed{D_n = Z_n D_{n-1} - D_{n-2}}$$

On a :

$$\chi_n = \det\left(X I_n - A_n\right) = (-1)^n \det\left(A_n - X I_n\right) = (-1)^n \begin{vmatrix} Z_1 - X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & Z_2 - X & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & Z_{n-1} - X & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & Z_n - X \end{vmatrix}_n.$$

On peut donc utiliser la relation de récurrence ci-dessus en remplaçant les Z_k par $Z_k - X$, donc les D_k par $(-1)^k \chi_k$. Ceci donne $(-1)^n \chi_n = (Z_n - X)(-1)^{n-1}\chi_{n-1} - (-1)^{n-2}\chi_{n-2}$, soit :

$$\boxed{\chi_n = \left(X - Z_n\right)\chi_{n-1} - \chi_{n-2}}$$

3) Notons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=E(D_n)$. On a :

- $D_1=\det A_1=Z_1$, donc $u_1=E(D_1)=E(Z_1)=p$.
- $D_2=\det A_2=\begin{vmatrix} Z_1 & 1 \\ 1 & Z_2\end{vmatrix}=Z_1Z_2-1$, donc, par linéarité de l'espérance et indépendance de Z_1 et Z_2, on a $u_2=E(D_2)=E(Z_1Z_2)-1=E(Z_1)E(Z_2)-1=p^2-1$.

On a vu que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $D_{n+2}=Z_{n+2}D_{n+1}-D_n$. Or, D_{n+1} ne dépend que de $Z_1,Z_2,\dots,Z_{n+1}$ et les variables $Z_1,Z_2,\dots,Z_{n+1}$ et Z_{n+2} sont indépendantes, donc d'après le lemme des coalitions, D_{n+1} et Z_{n+2} sont indépendantes, et toujours avec la linéarité de l'espérance, on obtient la relation :

$$u_{n+2}=E(D_{n+2})=E(Z_{n+2}D_{n+1})-E(D_n)=E(Z_{n+2})E(D_{n+1})-E(D_n)=p\,u_{n+1}-u_n.$$

Remarquons qu'en posant $u_0=1$, on a $pu_1-u_0=p^2-1=u_2$, donc la relation de récurrence linéaire double $u_{n+2}-p\,u_{n+1}+u_n=0$ est vérifiée pour tout $n\in\mathbb{N}$.

L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence linéaire double ci-dessus est $x^2-p\,x+1=0$ de racines complexes $\dfrac{p-i\sqrt{4-p^2}}{2}$ et $\dfrac{p+i\sqrt{4-p^2}}{2}$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_n=A\left(\frac{p-i\sqrt{4-p^2}}{2}\right)^n+B\left(\frac{p+i\sqrt{4-p^2}}{2}\right)^n$$

avec $A,B\in\mathbb{C}$.

Enfin, avec les valeurs initiales, on a $\begin{cases} u_0=A+B=1 \\ u_1=A\dfrac{p-i\sqrt{4-p^2}}{2}+B\dfrac{p+i\sqrt{4-p^2}}{2}=p\end{cases}$, ce qui donne, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$E(D_n)=\frac{i}{\sqrt{4-p^2}}\left[\left(\frac{p-i\sqrt{4-p^2}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{p+i\sqrt{4-p^2}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Or, $\left|\dfrac{p+i\sqrt{4-p^2}}{2}\right|=\left|\dfrac{p-i\sqrt{4-p^2}}{2}\right|=1$, donc, en posant $\cos\alpha=\dfrac{p}{2}>0$ et $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{4-p^2}}{2}>0$, on a $\alpha\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{p+i\sqrt{4-p^2}}{2}=e^{i\alpha}$ et $\dfrac{p-i\sqrt{4-p^2}}{2}=e^{-i\alpha}$, donc :

$$E(D_n)=\frac{i}{\sqrt{4-p^2}}\left[e^{-i(n+1)\alpha}-e^{i(n+1)\alpha}\right]=\frac{2}{\sqrt{4-p^2}}\,\frac{e^{i(n+1)\alpha}-e^{-i(n+1)\alpha}}{2i}.$$

Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{E(D_n)=\frac{\sin\big((n+1)\alpha\big)}{\sin\alpha}\ \text{ avec }\ \alpha=\arccos\left(\frac{p}{2}\right)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[}$$

4) Procédons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Initialisation*

  Pour $n = 1$, on a $\chi_1 = \det\left(X I_1 - A_1\right) = X - Z_1$, donc χ_1 est un polynôme aléatoire unitaire de degré 1 et la propriété est vraie au rang $n = 1$.

  Pour $n = 2$, on a :

  $$\chi_2 = \det\left(X I_2 - A_2\right) = \begin{vmatrix} X - Z_1 & -1 \\ -1 & X - Z_2 \end{vmatrix} = (X - Z_1)(X - Z_2) - 1 = X^2 - (Z_1 + Z_2)X + Z_1 Z_2 - 1 .$$

  Donc χ_2 est un polynôme aléatoire unitaire de degré 1 et la propriété est aussi vérifiée au rang $n = 2$.

- *Hérédité*

  Pour $n \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$.

  D'après la question précédente, on a $\chi_{n+2} = \left(X - Z_{n+2}\right)\chi_{n+1} - \chi_n$.

  Or, par hypothèse de récurrence, χ_n et χ_{n+1} sont des polynômes aléatoires unitaires de degrés respectifs n et $n+1$, donc $\left(X - Z_{n+2}\right)\chi_{n+1}$ est un polynôme aléatoire unitaire de degré $n+2$ et le terme de plus haut degré de χ_{n+2} est celui de $\left(X - Z_{n+2}\right)\chi_{n+1}$, donc χ_{n+2} est bien un polynôme aléatoire unitaire de degré $n+2$. La propriété est vraie au rang $n+2$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\chi_n \text{ est un polynôme aléatoire unitaire de degré } n.}$$

5) On a $D_1 = Z_1$ et $D_2 = \begin{vmatrix} Z_1 & 1 \\ 1 & Z_2 \end{vmatrix} = Z_1 Z_2 - 1$.

Or, d'après la question 2, on a $D_3 = Z_3 D_2 - D_1$, donc $D_3 = Z_3\left(Z_1 Z_2 - 1\right) - Z_1$, soit :

$$\boxed{D_3 = Z_1 Z_2 Z_3 - Z_1 - Z_3}$$

Par linéarité de l'espérance, $E(D_3) = E(Z_1 Z_2 Z_3) - E(Z_1) - E(Z_3)$.

Comme les variables Z_1, Z_2 et Z_3 sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, on a $E(Z_1) = E(Z_2) = E(Z_3) = p$ et $E(Z_1 Z_2 Z_3) = E(Z_1)E(Z_2)E(Z_3) = p^3$, donc :

$$\boxed{E(D_3) = p^3 - 2p}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n(\Omega) = \{0,1\}$, donc $Z_n^2 = Z_n$ et :

$$\begin{aligned} E(D_3^2) &= E\left((Z_1 Z_2 Z_3 - Z_1 - Z_3)^2\right) = E\left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 + Z_1^2 + Z_3^2 - 2Z_1^2 Z_2 Z_3 - 2Z_1 Z_2 Z_3^2 + 2Z_1 Z_3\right) \\ &= E\left(Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 + Z_3 - 2Z_1 Z_2 Z_3 - 2Z_1 Z_2 Z_3 + 2Z_1 Z_3\right) = E\left(-3Z_1 Z_2 Z_3 + 2Z_1 Z_3 + Z_1 + Z_3\right) \\ &= -3E(Z_1)E(Z_2)E(Z_3) + 2E(Z_1)E(Z_3) + E(Z_1) + E(Z_3) = -3p^3 + 2p^2 + 2p \end{aligned}$$

Alors, $V(D_3)=E(D_3^2)-E(D_3)^2=-3p^3+2p^2+2p-(p^3-2p)^2$, soit :

$$\boxed{V(D_3)=2p-2p^2-3p^3+4p^4-p^6}$$

6) On a $Z_1(\Omega)=Z_2(\Omega)=Z_3(\Omega)=\{0,1\}$. Avec $D_3=Z_1Z_2Z_3-Z_1-Z_3$, pour $\omega\in\Omega$, les valeurs possibles de $D_3=Z_1Z_2Z_3-Z_1-Z_3$ peuvent être résumées dans un tableau :

$Z_1(\omega)$	0	0	0	0	1	1	1	1
$Z_2(\omega)$	0	0	1	1	0	0	1	1
$Z_3(\omega)$	0	1	0	1	0	1	0	1
$D_3(\omega)$	0	-1	0	-1	-1	-2	-1	-1

Ainsi, $D_3(\Omega)=\{-2,-1,0\}$ et, avec l'indépendance de Z_1, Z_2 et Z_3, on obtient la loi de D_3 :

- $P(D_3=-2)=P(Z_1=1)P(Z_2=0)P(Z_3=1)=(1-p)p^2$.
- $P(D_3=0)=P(Z_1=0)P(Z_3=0)=(1-p)^2$.
- $P(D_3=-1)=P(Z_1=0)P(Z_3=1)+P(Z_1=1)P(Z_3=0)+P(Z_1=1)P(Z_2=1)P(Z_3=1)$

  $=2(1-p)p+p^3$.

Remarquons que l'on a bien :

$$P(D_3=-2)+P(D_3=-1)+P(D_3=0)=(1-p)p^2+2(1-p)p+p^3+(1-p)^2=1.$$

Ainsi, la loi de D_3 peut être résumée dans le tableau :

Valeur de D_3	-2	-1	0
Probabilité	$(1-p)p^2$	$2(1-p)p+p^3$	$(1-p)^2$

On a alors :

- $E(D_3)=(-2)P(D_3=-2)+(-1)\times P(D_3=-1)=-2(1-p)p^2-2(1-p)p-p^3$, soit :

$$\underline{E(D_3)=p^3-2p}.$$

- $E(D_3^2)=4P(D_3=-2)+P(D_3=-1)=4(1-p)p^2+2(1-p)p+p^3=2p+2p^2-3p^3$.
- $V(D_3)=E(D_3^2)-E(D_3)^2=2p+2p^2-3p^3-(p^3-2p)^2$, soit :

$$\underline{V(D_3)=2p-2p^2-3p^3+4p^4-p^6}.$$

On retrouve bien les valeurs obtenues dans la question précédente.

7) Pour $\omega\in\Omega$, $A_3(\omega)$ est inversible si et seulement si $D_3(\omega)\neq 0$, donc la probabilité que A_3 soit inversible est $P(D_3\neq 0)=1-P(D_3=0)$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité que } A_3 \text{ soit inversible est } 1-(1-p)^2.}$$

8) On a $A_3 = \left(C_1 \ C_2 \ C_3\right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $C_1 = \begin{pmatrix} Z_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ Z_2 \\ 1 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ Z_3 \end{pmatrix}$.

Pour $\omega \in \Omega$, la matrice $A_3(\omega)$ n'est jamais nulle, donc $R_3(\omega) = rg\left(A_3(\omega)\right) \in \{1,2,3\}$.

De plus, $C_1(\omega)$ et $C_2(\omega)$ ne sont jamais proportionnelles (du fait de la troisième coordonnée), donc $R_3(\omega) \in \{2,3\}$.

Or, on vient de voir que $P\left(R_3 = 3\right) = P\left(D_3 \neq 0\right) = 1-(1-p)^2$, ainsi, la loi de R_3 peut être résumée dans le tableau :

Valeur de R_3	2	3
Probabilité	$(1-p)^2$	$1-(1-p)^2$

On a $E(R_3) = 2\times P\left(R_3 = 2\right) + 3\times P\left(R_3 = 3\right) = 2(1-p)^2 + 3\left(1-(1-p)^2\right)$, soit :

$$\boxed{E(R_3) = 3-(1-p)^2}$$

On a $E(R_3^2) = 4\times P\left(R_3 = 2\right) + 9\times P\left(R_3 = 3\right) = 4(1-p)^2 + 9\left(1-(1-p)^2\right) = 9-5(1-p)^2$, donc :

$$V(R_3) = E(R_3^2) - E(R_3)^2 = 9-5(1-p)^2 - \left(3-(1-p)^2\right)^2 = 9-5(1-p)^2 - 9 + 6(1-p)^2 - (1-p)^4 .$$

Soit :

$$\boxed{V(R_3) = (1-p)^2\left(1-(1-p)^2\right)}$$

9) On a $\chi_1 = X - Z_1$ et $\chi_2 = \begin{vmatrix} X-Z_1 & -1 \\ -1 & X-Z_2 \end{vmatrix} = (X-Z_1)(X-Z_2)-1$.

Or, d'après la question 2, on a $\chi_3 = \left(X - Z_3\right)\chi_2 - \chi_1$, donc :

$$\boxed{\chi_3 = (X-Z_1)(X-Z_2)(X-Z_3) - 2X + Z_1 + Z_3}$$

Pour $\omega \in \Omega$, la fonction polynomiale $f : x \mapsto \chi_3(\omega)(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- $f(0) = -D_3(\omega) \geq 0$;
- $f(1) = \left(1-Z_1(\omega)\right)\left(1-Z_2(\omega)\right)\left(1-Z_3(\omega)\right) - \left(1-Z_1(\omega)\right) - \left(1-Z_3(\omega)\right)$, et avec $1-Z_2(\omega) = 0$ ou 1, on obtient :

$$f(1) \leq \left(1-Z_1(\omega)\right)\left(1-Z_3(\omega)\right) - \left(1-Z_1(\omega)\right) - \left(1-Z_3(\omega)\right) = Z_1(\omega)Z_3(\omega) - 1 \leq 0 .$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a :

- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ f(0) \geq 0 \end{cases}$, donc f s'annule au moins une première fois sur $\left]-\infty ;0\right]$;

- $\begin{cases} f(1) \le 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$, donc f s'annule au moins une seconde fois sur $\left[1, +\infty\right[$.

Ainsi, $\chi_3(\omega)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ possédant au moins deux racines réelles distinctes, donc n'admet que des racines réelles. Ainsi :

$$\boxed{\chi_3 \text{ admet 3 racines réelles.}}$$

10) Rappelons que le déterminant est un invariant de similitude, autrement dit, deux matrices semblables ont le même déterminant. Soient M et N deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il existe alors $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $N = P^{-1}MP$ et :

$$\det\left(X I_n - N\right) = \det\left(X I_n - P^{-1}MP\right) = \det\left(P^{-1}(X I_n - M)P\right) = \det\left(X I_n - M\right).$$

Soit maintenant $\omega \in \Omega$. Si la matrice $A_3(\omega)$ est semblable à B, alors $\det A_3(\omega) = \det B$.

Or, B a deux lignes opposées (la première et la dernière), donc $\det B = 0$ et ainsi, $\det A_3(\omega) = 0$.

D'après le tableau de la question 6, on a alors $Z_1(\omega) = Z_3(\omega) = 0$.

De plus, en développant par rapport à la première colonne, on a :

$$\det\left(X I_3 - B\right) = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X-1 & 0 \\ 0 & 1 & X+1 \end{vmatrix} = X\left(X-1\right)\left(X+1\right) + \left(-X-1+1\right) = X^3 - 2X.$$

Or, si $Z_1(\omega) = Z_3(\omega) = 0$ et $Z_2(\omega) = 1$, alors, toujours en développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\det\left(X I_3 - A_3(\omega)\right) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X-1 & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X^3 - X^2 - 2X \ne \det\left(X I_3 - B\right).$$

Donc, dans ce cas, $A_3(\omega)$ et B ne sont pas semblables.

Si maintenant $Z_1(\omega) = Z_2(\omega) = Z_3(\omega) = 0$, on a $\det\left(X I_3 - A_3(\omega)\right) = X^3 - 2X = \det\left(X I_3 - B\right)$, donc $A_3(\omega)$ et B *peuvent être* semblables.

Remarquons que $\det\left(X I_3 - B\right) = X(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$, donc pour $\lambda \in \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$, on a $\det\left(\lambda I_3 - B\right) = 0$ et la matrice $\lambda I_3 - B$, n'est pas inversible. Il existe donc trois vecteurs non nuls U_1, U_2, U_3 de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $BU_1 = -\sqrt{2}\,U_1$, $BU_2 = 0$ et $BU_3 = \sqrt{2}\,U_3$.

Alors, si $\alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3 = 0$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} \alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3 = 0 \\ \alpha BU_1 + \beta BU_2 + \gamma BU_3 = 0 \\ \alpha B^2 U_1 + \beta B^2 U_2 + \gamma B^2 U_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3 = 0 \\ \sqrt{2}\left(-\alpha U_1 + \gamma U_3\right) = 0 \\ 2\left(\alpha U_1 + \gamma U_3\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta U_2 = 0 \\ -\alpha U_1 + \gamma U_3 = 0 \\ \alpha U_1 + \gamma U_3 = 0 \end{cases}$$

Ceci donne $\alpha=\beta=\gamma=0$, donc la famille (U_1,U_2,U_3) est libre et, comme elle contient trois vecteurs, c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (qui est de dimension 3). Dans cette base la matrice de l'endomorphisme canoniquement associée à B est $diag\left(-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\right)$ et ainsi, la matrice B est semblable à $diag\left(-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\right)$.

Comme $\det\left(XI_3-A_3(\omega)\right)=\det\left(XI_3-B\right)$ quand $Z_1(\omega)=Z_2(\omega)=Z_3(\omega)=0$, alors le même raisonnement s'applique à $A_3(\omega)$, et donc $A_3(\omega)$ est semblable à $diag\left(-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\right)$.

Enfin, la relation de similitude matricielle est transitive, donc comme $A_3(\omega)$ et B sont toutes deux semblables à la même matrice $diag\left(-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\right)$, elle sont semblable.

Nous venons donc d'établir que $A_3(\omega)$ et B sont semblables si et seulement si $Z_1(\omega)=Z_2(\omega)=Z_3(\omega)=0$ et donc la probabilité recherchée est :

$$P\left(Z_1=Z_2=Z_3=0\right)=P\left(Z_1=0,Z_2=0,Z_3=0\right)=P\left(Z_1=0\right)P\left(Z_2=0\right)P\left(Z_3=0\right)=(1-p)^3 .$$

Finalement :

$$\boxed{\text{La probabilité que } A_3 \text{ soit semblable à } B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix} \text{ est } (1-p)^3 .}$$