TD n° 0 : Suites et séries numériques

Exercice 1

Calculer $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum_{n\geq 0}\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$. ☺ *Pour la seconde, évaluer* $\arctan\left(\frac{1}{n}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Exercice 2

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ (somme partielle de la série harmonique).

Montrer que $H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$, où γ est une constante (constante d'Euler, $\gamma\approx 0,58$).

☺ *On pourra poser, pour tout entier* $n\geq 2$, $u_n=\frac{1}{n}-\ln n+\ln(n-1)$.

Exercice 3

Dans les deux cas suivants, déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{1}{2}\sin u_n$.
2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n est l'unique racine strictement positive de l'équation $\arctan\left(\frac{x}{n}\right)=nx^2$.

Exercice 4 (*Mines 2017, PC*)

On donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et de limite nulle.

Montrer que si l'ensemble D des réels $a>0$, tels que $\sum u_n^a$ converge, est non vide, alors il est de la forme $[m,+\infty[$ ou $]m,+\infty[$. Donner un exemple où D est vide et un où $D=]m,+\infty[$.

Exercice 5

Soit $f\in C^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $\int_1^x |f'(t)|dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$.

1) Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on pose : $w_n=\int_{n-1}^{n} f(t)dt-f(n)$.

   a. Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, on a $w_n=\int_{n-1}^{n}(n-1-t)f'(t)dt$, puis que $|w_n|\leq\int_{n-1}^{n}|f'(t)|dt$.

   b. En déduire que la série $\sum w_n$ est absolument convergente.

   c. Prouver alors que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

2) Soient g et h deux fonctions de $C([1,+\infty[,\mathbb{R}_+)$ telles que $h=\underset{+\infty}{o}(g)$. Montrer que si $\int_1^x g(t)dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$, alors $\int_1^x h(t)dt$ aussi.

Dans la suite, on admet que pour $g \in C([1,+\infty[,\mathbb{R})$, si $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x |g(t)|\,dt \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x g(t)\,dt \in \mathbb{R}$.

3) A l'aide de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$, montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ diverge.

4) On pose $f(x) = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}$.

   a. Montrer que $\int_1^x |f'(t)|\,dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

   b. Prouver que $\forall\, x \in [1,+\infty[$:

$$\int_1^x f(t)\,dt = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u}\,du = 2\left(\cos 1 - \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2}\,du\right).$$

   c. En déduire que la série $\sum \dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$ converge.