

TD du chapitre 9 : Calcul différentiel
Exercice 1

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f'(a) < f'(b)$.

Prouver le théorème de Darboux : f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que :

$$\forall k \in [f'(a), f'(b)], \exists c \in [a, b] \setminus f'(c) = k.$$

☺ On pourra commencer par le cas où $k = 0$ et montrer qu'alors f admet un minimum sur $[a, b]$.

Exercice 2

Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que f' est bornée sur $]0, 1[$. On veut prouver que f admet une limite à droite en 0.

On pose $M = \sup_{x \in]0, 1[} |f'(x)|$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{1}{2^n}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq M |x_{n+1} - x_n|$, puis que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$:

$$|f(x_{n+p}) - f(x_p)| \leq \frac{M}{2^p}.$$

2) Justifier alors que la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sup_{k \geq n} f(x_k)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie L .

4) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - f(x_n)| \leq \frac{M}{2^n}$ puis que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

5) Démontrer alors que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L$. ☺ On pourra utiliser la technique de la question 1.

Exercice 3

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , E un espace euclidien et $f : I \rightarrow E$

1) On suppose que f est deux fois dérivable et que $\|f''\|$ est constante.

Montrer que $(f \mid f'')$ est à valeurs négatives. Interprétation cinématique ?

2) On suppose que f est dérivable et qu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $\|f'(x)\| \leq k \|f(x)\|$.

Montrer que si la fonction f s'annule en un point de I , alors elle est nulle sur I .

☺ On pourra utiliser la fonction $g : x \mapsto \|f(x)\|^2 e^{-2kx}$.

Exercice 4

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie et $f : \mathbb{R} \rightarrow E$, continue en 0 et telle qu'il existe

$k \in]0, 1[$ et $\ell \in E$ tels que $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} [f(t) - f(kt)] \right) = \ell$.

1) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}, \forall i \in \mathbb{N}, \left\| \frac{1}{k^i t} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - \ell \right\| \leq \varepsilon$.

2) En déduire que f est dérivable en 0 et exprimer $f'(0)$ en fonction de k et ℓ .

Exercice 5

Soit le système $(S) : X' = AX$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 3$. Résoudre (S) quand :

- A est une matrice de projection orthogonale sur un plan.
- A est une nilpotente d'indice n .

☺ On admettra que si $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $A^{n-1}X_0 \neq 0$, alors la famille $(X_0, AX_0, A^2X_0, \dots, A^{n-1}X_0)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 6

L'espace \mathbb{R}^3 est orienté positivement par sa base canonique et muni de son produit scalaire canonique.

Résoudre l'équation différentielle $\vec{f}' \wedge \vec{u} = \vec{f}$ d'inconnue $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec $\vec{u} = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$.

☺ On pourra introduire le plan $P = (\vec{u})^\perp$.

Exercice 7

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , et deux fonctions a et b , respectivement de classe C^1 et C^0 sur I .

Déterminer une condition nécessaire sur a et b pour que l'équation $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ admette deux solutions non nulles y_1 et y_2 telles que pour tout $t \in I$, $y_2(t) = t y_1(t)$. Cette condition est-elle suffisante ?

Résoudre $y'' + 2ty' + (t^2 + 1)y = te^{-t^2/2}$.

Exercice 8

Soit $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ avec a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Si h_1 et h_2 sont deux solutions de (E) sur I . On pose pour tout $t \in I$, $W(t) = \begin{vmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{vmatrix}$.

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

- (h_1, h_2) est libre.
- Il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$.
- $W(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

☺ On pourra montrer que W vérifie une équation différentielle simple.

Exercice 9

Déterminer le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n$, puis calculer $f(x)$ quand x appartient à l'intervalle ouvert de convergence.

En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) On suppose que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) + \alpha f(x)] = \ell$ où α et ℓ sont deux nombres complexes tels que tel que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$.

$$\text{Montrer que } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\ell}{\alpha}.$$

- 2) On suppose que f est de classe C^2 sur \mathbb{R} et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f''(x) + f'(x) + f(x)] = 0$.

$$\text{Montrer que } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

- 3) On suppose que f est de classe C^n sur \mathbb{R} (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que les racines de $P = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \dots + \alpha_1X + \alpha_0$ ont toutes une partie réelle strictement négative et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_1f'(x) + \alpha_0f(x)] = 0.$$

$$\text{Montrer que } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Exercice 11

$$1) \text{ Soit } f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

Déterminer le plus grand sous-ensemble de \mathbb{R}^2 sur lequel f est de classe C^1 .

Les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent-elles ? Si oui, sont-elles égales ?

- 2) Montrer que $f : (x, y) \mapsto \frac{\sin x - \sin y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}$ admet un prolongement de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 12

Dans les cas suivants, montrer que f ou g est différentiable sur son ensemble de définition et déterminer sa différentielle.

$$1) f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R} ; P \mapsto \int_0^1 P^2.$$

$$2) f : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; A \mapsto A^{-1}.$$

Exercice 13

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue en a , $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue en b et $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application admettant un maximum local en $(u(a), v(b))$.

Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} ; (x, y) \mapsto f(x, y) = \varphi(u(x), v(y))$ admet un maximum local en (a, b) .

Exercice 14

Déterminer le maximum du produit des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux cotés de ce triangle.

Exercice 15

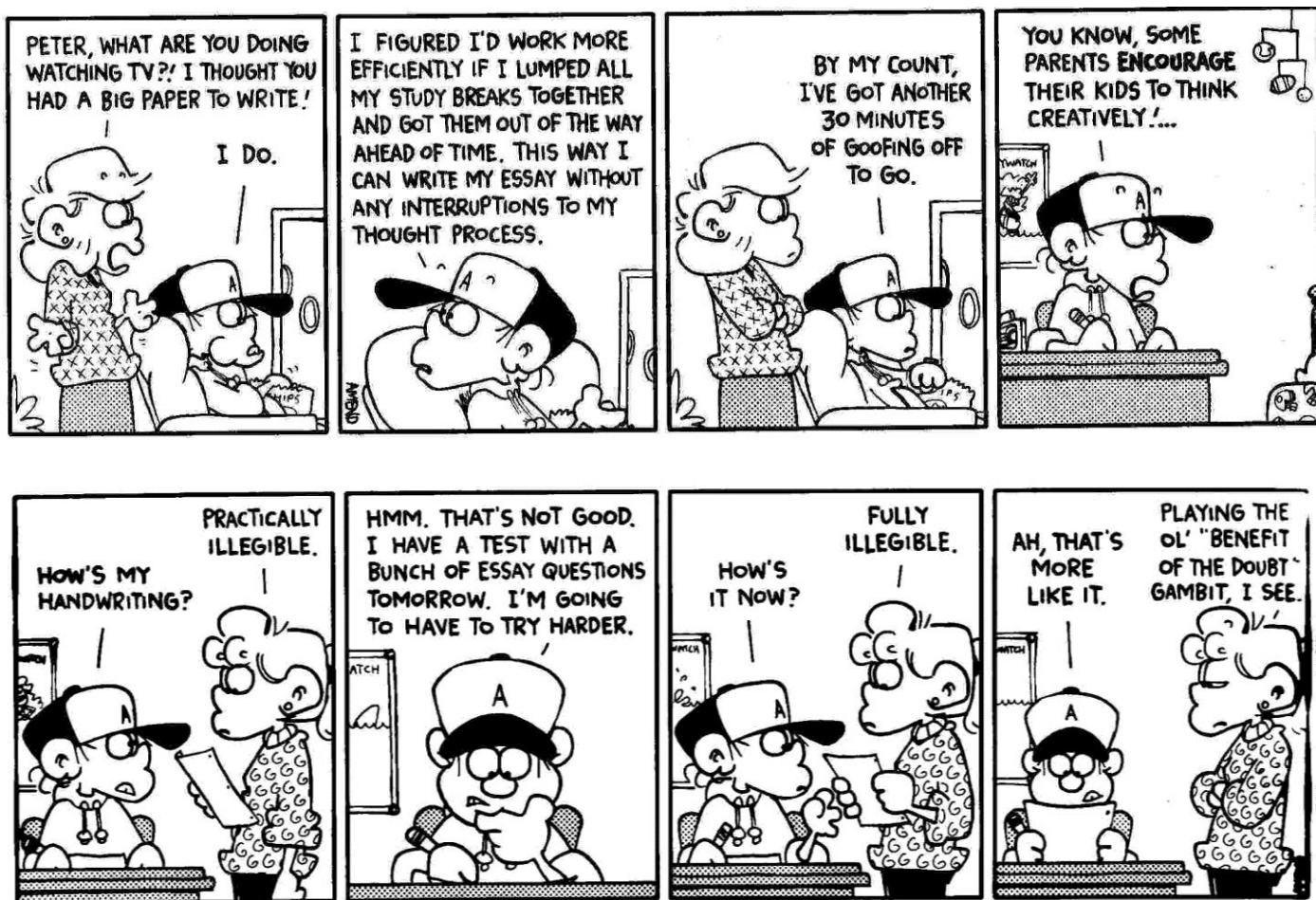
Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

1) Soit $g : (x, y) \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, 0) dt$. Montrer que $g \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et vérifie :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}.$$

2) On définit sur \mathbb{R}_+ l'application $\Phi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$. Montrer que Φ est de classe C^1 et calculer sa dérivée.

3) En déduire que si f possède un extremum local en $(0, 0)$, alors f est constante au voisinage de $(0, 0)$.



Exercice 16 (X adapté)

Existe-t-il des fonctions \vec{f} de classe C^1 sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}^*$) et vérifiant $\|\vec{f}\| \leq 2$ et $\vec{f} \cdot \vec{f}' \geq \sin$?

Exercice 17 (Centrale)

On considère l'équation (E) : $x^2 y' + y = x^2$.

1) Résoudre cette équation sur \mathbb{R}_+^* . Montrer qu'il existe une unique solution qui converge en 0.

☺ On pourra utiliser la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ qui est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

2) Existe-t-il une solution de (E) développable en série entière au voisinage de 0 ?

Exercice 18 (Mines)

1) Soient $g \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, $\varphi \in C^0([a, b], \mathbb{R}_+)$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in [a, b]$:

$$g(x) \leq c + \int_a^x \varphi(t)g(t) dt.$$

Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) \leq c \exp\left(\int_a^x \varphi(t) dt\right)$.

2) Soient $q \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$, croissante.

Montrer que toute solution f de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$ est bornée.

☺ On pourra poser $g = qf^2$.

Exercice 19 (Centrale)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$.

1) Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.

2) Donner une expression de f à l'aide d'une intégrale, mais sans signe somme.

3) Déterminer les extrema de f .

Exercice 20 (ENS - Mines)

Soient $C \in \mathbb{R}^n$ et une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur C et S pour que l'application $f : X \in \mathbb{R}^n \mapsto C^T X + X^T S X$ présente un extremum.

Exercice 21 (Mines)

Soient $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et g la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $g(x, y) = f\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right)$.

Déterminer les fonctions f telles que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.

