

**TD du chapitre 6 : Compléments d'algèbre linéaire**

Dans tout le TD, sauf mention contraire,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 1**

Soient  $F, G$  et  $H$  trois sous-espaces de  $E$ .

1) Montrer que :

$$\dim(F + G + H) \leq \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F \cap G) - \dim(F \cap H) - \dim(G \cap H) + \dim(F \cap G \cap H).$$

2) Soient  $F'$  (resp.  $G'$ ) un supplémentaire de  $F \cap G$  dans  $F$  (resp.  $G$ ). Montrer que :

$$F + G = (F \cap G) \oplus F' \oplus G'.$$

3) On suppose que  $n \geq 3$ . Montrer que l'intersection de  $n-1$  hyperplans de  $E$  n'est pas réduite à  $\{0\}$ .

**Exercice 2**

Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $f^2 = g^2 = id_E$  et  $fg + gf = 0$ .

Montrer que  $n$  est pair et qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle les matrices de  $f$  et  $g$  sont respectivement :

$$\left( \begin{array}{c|c} I_p & 0_p \\ \hline 0_p & -I_p \end{array} \right) \text{ et } \left( \begin{array}{c|c} 0_p & I_p \\ \hline I_p & 0_p \end{array} \right).$$

**Exercice 3**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que :

1) ( $f$  non injective)  $\Leftrightarrow$  ( $f = 0$  ou  $f$  est un diviseur de zéro à gauche).

2) ( $f$  non surjective)  $\Leftrightarrow$  ( $f = 0$  ou  $f$  est un diviseur de zéro à droite).

**Exercice 4**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$ , annulateur de  $f$  et tel que  $P = P_1 P_2$  où  $P_1$  et  $P_2$  sont deux polynômes non nuls de  $\mathbb{K}[X]$  sans racine commune (réelle ou complexe).

On admet (ou rappelle) le théorème de Bézout pour les polynômes : avec les hypothèses faites ci-dessus sur  $P_1$  et  $P_2$ , il existe  $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $UP_1 + VP_2 = 1$ .

On veut prouver qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  où  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées telles que  $P_1(A) = 0$  et  $P_2(B) = 0$ . On pose  $u = P_1(f)$  et  $v = P_2(f)$ .

1) Justifier que  $uv = vu = 0$ . En déduire que  $\dim(\ker u) + \dim(\ker v) \geq n$ .

2) Montrer que  $\ker u \cap \ker v = \{0\}$ , puis que  $E = \ker u \oplus \ker v$ .

3) Prouver que  $\ker u$  est stable par  $f$  et que  $P_1$  est un polynôme annulateur de l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $\ker u$  et conclure.

4) Peut-généraliser au cas où  $P = P_1 P_2 \dots P_r$ , avec  $r \geq 2$  et où les  $P_i$  sont des polynômes non nuls de  $\mathbb{K}[X]$  deux à deux sans racine commune (réelle ou complexe) ?

**Exercice 5**

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  nilpotente, on pose  $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ .

1) Soient  $A$  et  $B$  deux matrices nilpotentes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui commutent.

Montrer que alors  $A+B$  est nilpotente et  $\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B) = \exp(B) \times \exp(A)$ .

2) Montrer que  $\exp(A)$  est inversible et donner son inverse.

**Exercice 6**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices non nulles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $a \in \mathbb{K}$ .

Existe-t-il  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $aM + \text{tr}(M)A = B$  ?

**Exercice 7**

Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $GL(E)$  (partie non vide de  $GL(E)$ , stable par composition et passage à la réciproque). On appelle  $r$  le cardinal de  $G$ .

1) On suppose que  $\sum_{g \in G} \text{tr}(g) = 0$ . Montrer que  $\sum_{g \in G} g = 0$ .

2) Montrer que  $F = \{x \in E \mid \forall g \in G, g(x) = x\}$  est un sous-espace de  $E$  de dimension  $\frac{1}{r} \sum_{g \in G} \text{tr}(g)$ .

**Exercice 8**

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On pose  $N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker f^k$  et  $I = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \text{Im } f^k$ .

On dit que  $f$  est nilpotent s'il existe une puissance de  $f$  nulle. On appelle alors indice de nilpotence de  $f$  le plus petit entier naturel non nul  $\alpha$  tel que  $f^\alpha = 0$ .

1) Dans cette question,  $E$  n'a pas besoin d'être de dimension finie.

a. Montrer que les suites  $(\ker f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\text{Im } f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion.

b. Montrer que si, pour  $p \in \mathbb{N}$ , on a  $\text{Im } f^p = \text{Im } f^{p+1}$ , alors  $\text{Im } f^k = \text{Im } f^p$  pour tout entier  $k \geq p$ .

c. Montrer que l'on a la même propriété pour les  $\ker f^k$ .

d. Prouver que  $N$  et  $I$  sont stables par  $f$ .

Dans la suite, on suppose que  $E$  est de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

2) a. Prouver qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Im } f^p \neq \text{Im } f^{p-1}$  si  $p \neq 0$  et  $\text{Im } f^k = \text{Im } f^p$  pour tout entier  $k \geq p$ .

b. Montrer qu'alors  $\ker f^p \neq \ker f^{p-1}$  si  $p \neq 0$  et  $\ker f^k = \ker f^p$  pour tout entier  $k \geq p$ .

c. Montrer que  $p \leq n$ .

d. Justifier que  $N = \ker f^p$  et  $I = \text{Im } f^p$ , et prouver que  $E = \ker f^p \oplus \text{Im } f^p$ .

e. Montrer que la suite  $(\text{rg}(f^k) - \text{rg}(f^{k+1}))_{k \in \mathbb{N}}$  est décroissante, et minorée par 1 jusqu'au rang  $p-1$ .

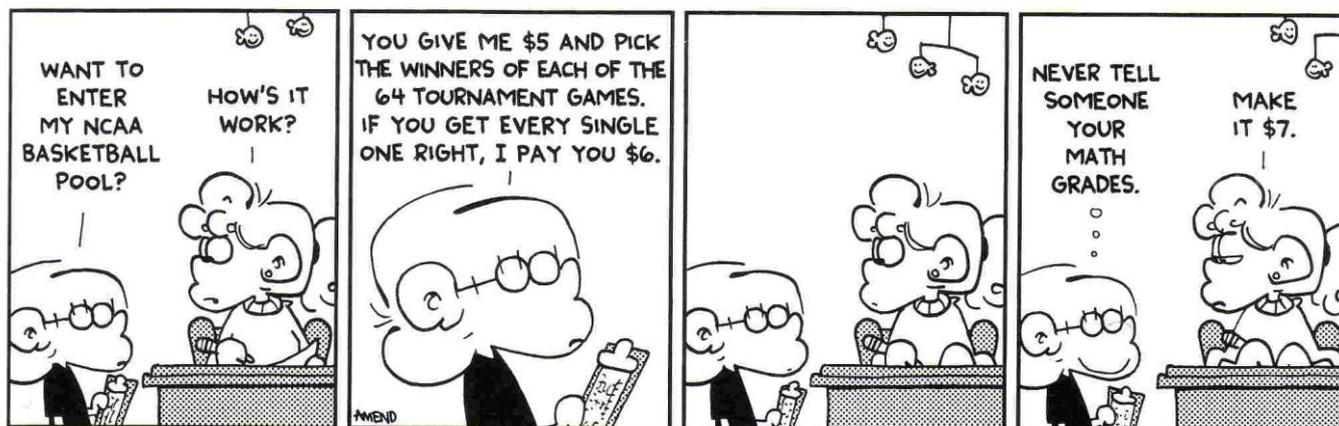
En déduire que pour tout  $k \in \{1, p-1\}$  (quand  $p \geq 2$ ) :  $k \leq \text{rg}(f) - \text{rg}(f^{k+1}) \leq k[n - \text{rg}(f)]$ .

- 3) On suppose ici que  $f$  est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe une puissance de  $f$  nulle. On appelle indice de nilpotence de  $f$  le plus petit entier naturel non nul  $\alpha$  tel que  $f^\alpha = 0$ .
- Montrer que l'indice de nilpotence de  $f$  est  $p$  (défini dans la question précédente).
  - Justifier que  $f^n = 0$ .
  - On suppose que  $f \neq 0$ . Justifier qu'il existe un vecteur  $x \in E$  tel que  $f^{p-1}(x) \neq 0$  et montrer que la famille  $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$  est libre.
  - On suppose ici que  $p = n$ . Prouver alors qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On revient au cas où  $f$  est quelconque.

- 4) Montrer que l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $N$  est nilpotent et que l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $I$  appartient à  $GL(I)$ .
- 5) Existe-t-il une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  telle que  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ?



### Exercice 9 (Inspiré de X-ESPCI)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- On suppose que  $\text{Tr}(A) = 0$ .  
Prouver que  $A$  est semblable à une matrice dont le premier coefficient diagonal est nul.
- Montrer que si  $\text{Tr}(A) = 0$ ,  $A$  peut se décomposer en une somme de deux matrices nilpotentes.  
☺ On pourra prouver que  $A$  est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.
- Si  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , montrer que  $A$  et  $-A$  sont semblables si et seulement si  $\text{Tr}(A) = 0$ .

**Exercice 10** (Mines-Ponts)

- 1) Montrer que pour toute forme linéaire  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ , il existe une unique  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\varphi(M) = \text{Tr}(AM)$ .
- 2) Déterminer les formes linéaires  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$  telles que pour toutes matrices  $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\varphi(MN) = \varphi(NM)$ .

**Exercice 11** (inspiré de Mines-Ponts) Pour les 5/2. Les 3/2 peuvent revenir à cet exercice après le chapitre 8.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^3 = id_E$ .

- 1) Prouver que  $\text{Im}(u - id_E) = \ker(u^2 + u + id_E)$ ,  $\ker(u - id_E) = \text{Im}(u^2 + u + id_E)$  et que  $\ker(u - id_E)$  et  $\text{Im}(u - id_E)$  sont supplémentaires dans  $E$ .
- 2) Déterminer les sous-espaces stables par  $u$  quand  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .
- 3) Même question quand  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

