

TD du chapitre 5 : Séries entières
Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ et étudier la convergence au bord du disque de convergence pour :

a. $a_n = \frac{i^n n^2}{(n^2 + 1)2^n}$.

b. $a_n = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n}$.

c. a_n est le $n^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule de $\sqrt{2}$ (avec $a_0 = 1$).

d. $a_n = \ln \left(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right)$.

e. a_n est l'unique solution réelle de $x^3 + nx - 1 = 0$.

f. $a_n = \ln n$ (en considérant $(1-x)f(x)$, on donnera un équivalent en 1 de la somme $f(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$).

On étudiera les trois dernières sur \mathbb{R} .

Exercice 2

1) Déterminer le rayon de convergence, le domaine de convergence et calculer la somme f de $\sum a_n x^n$ pour :

a. $a_n = \frac{n^3 + n + 3}{n+1}$ b. $a_n = \frac{(n+1)^2}{n!}$ c. $a_n = \frac{1}{n - (-1)^n}$ d. $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} \binom{2n}{n}$ (établir : $2f = (1+4x)f'$).

2) Déterminer la somme de la série $\sum a_n$ pour :

a. $a_n = \frac{2^n + 3^n n}{5^n n(n-1)}$. b. $a_n = \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 3

1) Développer les fonctions suivantes en série entière au voisinage de 0 et donner le rayon de convergence.

a. $f : x \mapsto \frac{\sin 4x}{\sin x}$.

b. $f : x \mapsto \frac{1}{x^4 - 3x^2 + 2}$.

c. $f : x \mapsto \arctan \left(\frac{1+x}{1-x} \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)$ ($\alpha \in]0; \pi[$). ☺ On pourra commencer par f' .

2) Montrer que $f : x \mapsto \frac{2}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{ch} x - 1}$ est prolongeable par continuité en une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice 4

Soient b et c deux nombres complexes fixés et une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + b(n+1)a_{n+1} + ca_n = 0.$$

- 1) En admettant que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est strictement positif, montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution sur $] -R; R[$ de l'équation différentielle (E) : $y'' + by' + cy = 0$.
- 2) Déterminer alors toutes les suites vérifiant la relation de récurrence ci-dessus pour $c = -b - 1$.
- 3) Reprendre la question précédente en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n! a_n$.

Exercice 5

Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. On note f la somme de la série.

- 1) Dans cette question, on suppose que les a_n sont des réels positifs, que $R = 1$ et que f est bornée sur $]0; 1[$.
 - a. Montrer que la série numérique $\sum a_n$ converge et que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n$.
 - b. Ce résultat subsiste-t-il quand les a_n sont de signe quelconque ?
- 2) Dans cette question, on veut prouver le Théorème d'Abel qui dit que :

Si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

- a. Montrer que l'on peut se ramener au cas où $R = 1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.

Dans la suite, on suppose que les deux conditions ci-dessus sont réalisées.

- b. On pose $S_{-1} = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$ et tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^N (S_n - S_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^N S_n (x^n - x^{n+1}) + S_N x^{N+1}.$$

- c. En déduire que pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$ et conclure.

Exercice 6

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- 1) On suppose que $a_0 = 1$.
 - a. Prouver qu'il existe une unique suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $c_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n a_k c_{n-k} = 0$.
 - b. Soit $r \in]0; R[$. Justifier qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n r^n| \leq M$.
Les réels r et M ainsi fixés, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|c_n| \leq \frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}$.
 - c. En déduire que $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence non nul. Que conclure ?

2) Soit $\sum b_n x^n$ une autre série entière réelle de rayon de convergence 1 et de somme $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$, que la série $\sum b_n$ diverge, et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que $g(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 1^-$, puis que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} et vérifiant $f(0) = 0$. On définit sur \mathbb{R}^* la fonction :

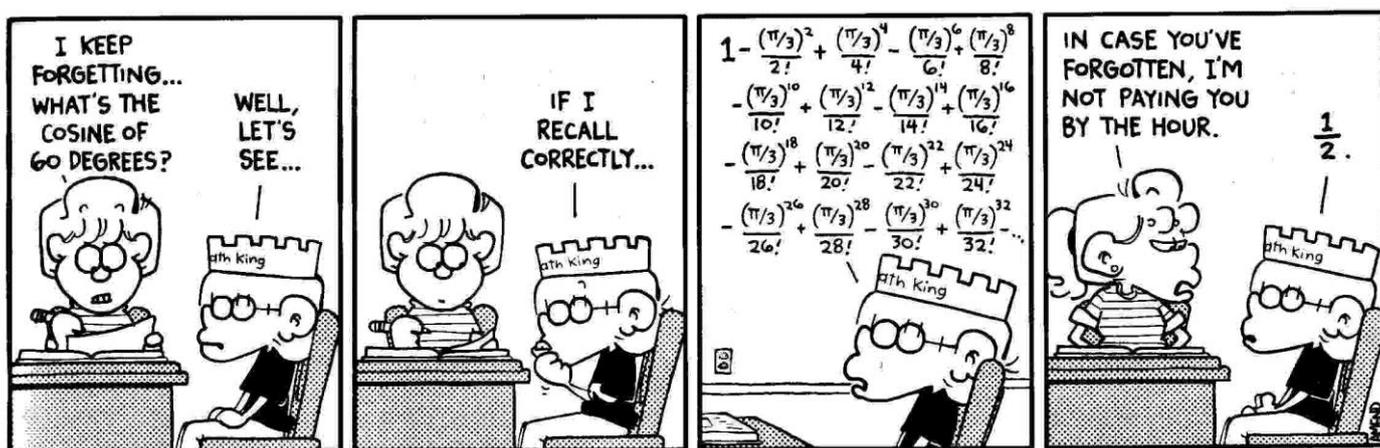
$$\varphi : x \mapsto \frac{f(x)}{x}.$$

On cherche à prouver que φ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

- 1) Justifier que la fonction φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* et qu'elle peut être prolongée en une fonction continue sur \mathbb{R} , notée $\tilde{\varphi}$.
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale entre x et 0, ainsi que la formule de Leibniz, montrez que pour $x \in \mathbb{R}^*$:

$$x^{n+1} \varphi^{(n)}(x) = \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

- 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que la fonction $\varphi^{(n)}$ a pour limite $\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$ en 0.
- 4) En déduire que $\tilde{\varphi}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
- 5) Reprendre l'exercice en supposant que f est développable en série entière au voisinage de 0.



Exercice 8 (Mines et Centrale)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée. On note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de sommes partielles de la série numérique de terme général a_n et on pose :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n!} x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{S_n}{n!} x^n.$$

- 1) Déterminer le rayon de convergence des séries entières f et g .
- 2) Déterminer une relation entre f' , g' et g .

- 3) En déduire que $\int_0^x e^{-t} f(t) dt = e^{-x} (g(x) - f(x))$.
- 4) Déterminer la limite de $x \mapsto e^{-x} g(x)$ en $+\infty$ dans le cas où $a_n = (-1)^n$.
- 5) On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} f(t) dt$.

Exercice 9 (Mines)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n \geq 1} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

- 1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière f , puis étudier la convergence en $\pm R$.
- 2) Déterminer la limite en 1 de $x \mapsto (1-x)f(x)$.

Exercice 10 (Mines)

Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$. Calculer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

