TD du chapitre 4 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\int_0^1 (t^2+1) \dfrac{ne^t + te^{-t}}{n+t} \, dt \right]$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on considère l'équation $(E_{x,n})$: $t^3 + xt - 1 - \dfrac{1}{n} = 0$ (d'inconnue *t*).

1) Montrer que $(E_{x,n})$ admet une unique solution réelle, que l'on notera $u_n(x)$.
2) Prouver que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction *u*, strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+$.
3) Prouver que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3

Soient φ une fonction continue sur $[0,1]$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_0 = \varphi$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = 1 + F_n$ où F_n est la primitive de f_n qui s'annule en 0.

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2) En admettant que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction *f*, donner cette fonction.
3) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers *f*. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 4

Pour $x \in]1;+\infty[$, on pose $\zeta(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^x}$ et $\tau(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1) Montrer que la fonction ζ est bien définie et continue sur $]1;+\infty[$.
2) Montrer que la fonction ζ est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$ et exprimer ses dérivées successives sous la forme d'une somme de série.
3) Dresser le tableau de variations de ζ.
4) Après avoir justifié que τ est bien définie sur $]1;+\infty[$, établir une relation entre ζ et τ.
5) En déduire que τ est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$.
6) Donner un équivalent de $\zeta(x)$ au voisinage de 1, puis au voisinage de $+\infty$.

Exercice 5

Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{x^2+n^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$.

☺ *Penser à une certaine technique du chapitre sur les séries numériques…*

Exercice 6

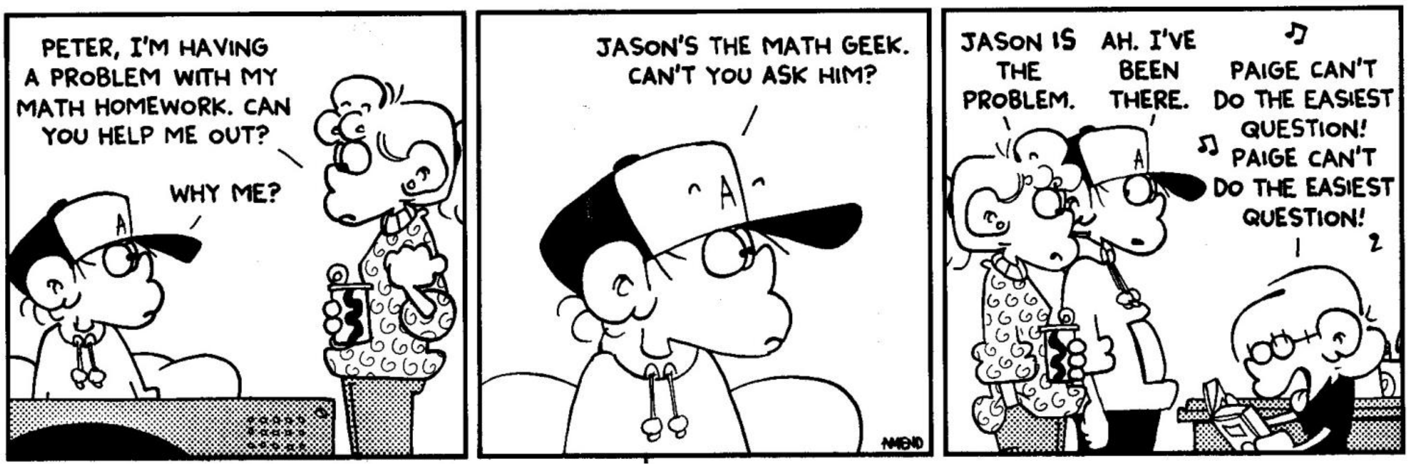
Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$, on pose $f_n(x)=x^n(1-x)^n$ et $I_n=\int_0^1 f_n(t)dt$ (on prendra $f_0(0)=f_0(1)=1$).

1) Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$.
2) Calculer I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3) Justifier que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 7

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x)=\dfrac{x}{n(1+n^2x)}$.

1) Etudier la convergence de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.
2) Etudier la régularité (continuité, dérivabilité, classe C^k) de la somme $S=\sum_{n\geq 1} f_n$.
3) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$.



Exercice 8 (*Centrale*)

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite de fonctions polynômes définie par $P_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{1}{2}\left(x-P_n(x)\right)^2.$$

Etudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis de la série $\sum\left(id-P_n\right)$.

☺ *On admettra la propriété de Césaro qui dit que si une suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers une limite finie* ℓ, *alors la suite des moyennes de Césaro* $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge aussi vers* ℓ.

Exercice 9 (*Centrale*)

Soit $f : x \mapsto -\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{(x-n)^2}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

1) Montrer que *f* est bien définie, 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
2) Montrer que *f* se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$ et que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$4f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

3) Prouver que *f* est nulle et en déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.