TD du chapitre 2 : Espaces vectoriels normés

Sauf mention contraire, on se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ ($\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exercice 1

Soient *x* et *y* de vecteurs non nuls de *E* et $a\in[0,1[$.

1) Montrer que si $\dfrac{\|y-x\|}{\|x\|}\leq a$, alors $\dfrac{\|y-x\|}{\|y\|}\leq\dfrac{a}{1-a}$.
2) Prouver que $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}-\dfrac{y}{\|y\|}\right\|\leq 2\dfrac{\|x-y\|}{\max(\|x\|,\|y\|)}$.

Exercice 2

Ici, $E=\mathbb{R}[X]$. Pour tout $P=a_nX^n+\ldots+a_1X+a_0$, on pose :

$$N_1(P)=\sum_{k=0}^{n}|a_k|,\quad N_\infty(P)=\max_{0\leq k\leq n}|a_k|\quad\text{et}\quad N(P)=\max_{t\in[0,1]}|P(t)|.$$

Montrer que N_1, N_∞ et N sont des normes sur *E*. Sont-elles équivalentes ?

Exercice 3

Soient *F* un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u\in\mathcal{L}(F,E)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur *u* pour que l'application $N:x\mapsto\|u(x)\|$ soit une norme sur *F*.

Exercice 4

Ici $E=B([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|.\|_\infty$. On pose $A=\left\{f\in E,\ \forall\,x\in[0,1],\ 2+f(x)\leq e^{f(x)}\right\}$.

Montrer que *A* est une partie fermée et non bornée de *E*.

Exercice 5

Soient *A* et *B* deux parties de *E*.

1) Prouver que $E\backslash\overline{A}=\overset{\circ}{\overline{E\backslash A}}$ et $E\backslash\overset{\circ}{A}=\overline{E\backslash A}$.
2) Prouver que si $A\subset B$, alors $\overline{A}\subset\overline{B}$ et $\overset{\circ}{A}\subset\overset{\circ}{B}$.
3) Montrer que $\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}=\overset{\circ}{\overline{A\cap B}}$.
4) Montrer que $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$, mais que l'inclusion réciproque n'est pas forcément vraie.

Exercice 6

Soit *C* une partie convexe de *E*. Montrer que $\overline{C}$ et $\overset{\circ}{C}$ sont aussi convexes.

Exercice 7

On prend ici $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

1) Montrer qu'il existe une norme $\|.\|$ de E telle que pour toutes $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\|\leq\|A\|.\|B\|$.

   ☺ *Vous avez l'embarras du choix ! Une telle norme est appelée <u>norme matricielle</u>.*

2) Soit $A\in E$. Montrer que si $\|A\|<1$, alors la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ des puissances de A converge vers 0_n (la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) et justifier que l'on ne peut pas conclure quand $\|A\|\geq 1$.

3) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des parties fermées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que si $A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, la seule limite possible de la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est 0_n.

   ☺ *On rappelle que $S_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont respectivement les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

4) Soit $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont strictement positifs. Montrer que $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de E.

5) L'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il fermé ? ouvert ?

   S'il est fermé, donner son intérieur ; s'il est ouvert, donner son adhérence.

6) (*Centrale*) Soit $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})=\left\{A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall\,(i,j)\in\llbracket 1,n\rrbracket^2,\ a_{i,j}\in[0,1]\right\}$.

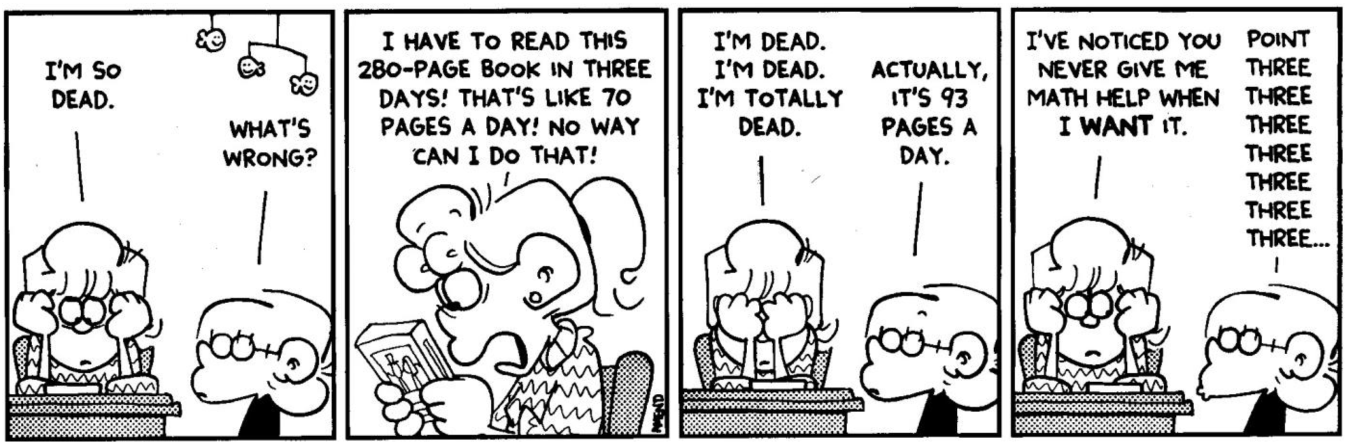
   Montrer que la partie $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est convexe, fermée et bornée.

7) Soit $A\in E$. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on pose $A_p=\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}A^k$.

   a. Montrer que pour toutes $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\|_\infty\leq n.\|A\|_\infty.\|B\|_\infty$.

   b. Montrer que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Sa limite est notée $\exp(A)$.

   c. Calculer $\exp(A)$ pour $A=\begin{pmatrix} a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}$, $A=diag(a_1,\dots,a_n)$.



Exercice 8 (*Mines*)

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $N(P) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |P(t)|$. On admet que c'est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

On appelle E_n l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}_n[X]$ et on pose $a_n = \inf\limits_{P\in E_n} N(P)$.

1) Calculer a_0 et a_1, et justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$.
2) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

Exercice 9 (*X*)

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On munit $E = \mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique.

1) Soient B_1 et B_2 deux boules fermées de *E*, de centres respectifs x_1 et x_2, et de même rayon $r > 0$.

   Trouver $r_{\min}$ le rayon minimal d'une boule qui contient $B_1 \cap B_2$.
2) Soit *K* une partie compacte de *E*. On appelle *r* la borne inférieure de tous les rayons des boules fermées de *E* qui contiennent *K*. Montrer que *r* existe bien.
3) Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boules fermées contenant *K*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la boule B_n est de centre x_n et de rayon r_n. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = r$. Déterminer la limite de la suite de terme général $z_n = \sup\limits_{k>n} \|x_k - x_n\|$.