TD du chapitre 17 : Espaces euclidiens de dimension 2 ou 3

Dans les exercices 1 à 3, on se place dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa structure euclidienne canonique et orienté par la base canonique.

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a^2 - 1 & a \\ -a & a^2 - 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs de *a* pour que $A \in O(2)$.
2) Dans ce cas, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme canoniquement associé à *A*.

Exercice 2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires et non colinéaires de $\mathbb{R}^2$. Pour tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^2$, on pose :

$$p(\vec{x}) = (\vec{x} \mid \vec{u})\vec{u} \quad \text{et} \quad q(\vec{x}) = (\vec{x} \mid \vec{v})\vec{v}.$$

Montrer que l'application $p + q - 2p \circ q$ est une similitude directe, c'est-à-dire la composée d'une rotation et d'une homothétie.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $|tr(A)| < 2$ et $\det A = 1$.

a. Montrer que $bc \neq 0$.
b. Montrer que *A* est la matrice d'une rotation vectorielle dans une base bien choisie.

   ☺ *Poser* $a + d = 2\cos\theta$ *avec* $0 < \theta < \pi$.

Dans les exercices 4 à 7, s'il y a lieu, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Exercice 4

Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ quatre vecteurs de *E*.

1) Montrer que $(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix}$.
2) En déduire la formule du double produit vectoriel : $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$.
3) Résoudre l'équation $\vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{b}$ d'inconnue $\vec{u} \in E$, où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs donnés de *E*.

Exercice 5

On considère un vecteur unitaire $\vec{a}$ de E, p la projection orthogonale sur $D = \text{Vect}(\vec{a})$, $q = id_E - p$ et la rotation r, d'angle θ et d'axe dirigé et orienté par $\vec{a}$ (où θ est un réel fixé).

1) Montrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, on a :

$$r(\vec{u}) = p(\vec{u}) + (\cos\theta)\, q(\vec{u}) + (\sin\theta)\, \vec{a} \wedge \vec{u}\,.$$

☺ *On pourra commencer par le cas où $\vec{u}$ est orthogonal à l'axe.*

Justifier que la relation ci-dessus permet d'obtenir directement la matrice de r dans une base orthonormale directe donnée.

2) Expliquer comment déterminer l'axe et l'angle d'une rotation donnée par sa matrice dans une base orthonormale directe (on pourra séparer parties symétrique et antisymétrique).

3) Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe de E et $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(\vec{u}) = \vec{u}$ et $r(\vec{i}) = -\vec{j}$. Préciser la matrice de r dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

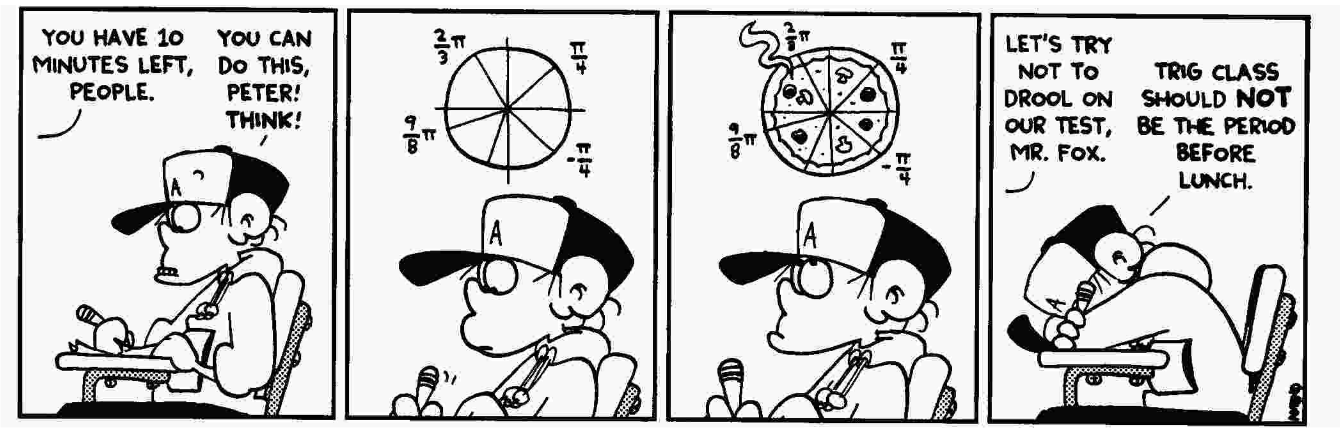
Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Déterminer a, b et c pour que l'endomorphisme canoniquement associé à A soit une rotation. Donner alors son axe et son angle.

Exercice 7

Déterminer les centres des groupes $O(E)$ et $SO(E)$.

Le centre d'un groupe est l'ensemble des éléments de ce groupe commutant avec tous les éléments du groupe.



Exercice 8 (*Mines*)

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$.

Pour tout réel a, on définit sur $\mathbb{R}^3$ l'application $f_a : x \mapsto x + a\langle x, u\rangle u$.

1) Montrer que f_a est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$.

2) Montrer qu'il existe un unique réel $a_0 \neq 0$ tel que f_{a_0} soit une isométrie. Donner alors la nature de f_{a_0}.

3) Calculer $\exp(f_{a_0}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} f_{a_0}^k$.

Exercice 9 (*Centrale*)

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit e_1 et e_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et :

$$f : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \langle x, e_2 \rangle e_1 + \langle x, e_1 \rangle e_2 .$$

1) On suppose que e_1 et e_2 sont linéairement indépendants. Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de *f* est $diag(\lambda_1, \lambda_2, 0)$ avec $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$.
2) Etudier la réciproque.

Exercice 10 (*Centrale*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que les colonnes c_1, c_2, c_3 de *A* forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer (u, v, w), la base de $\mathbb{R}^3$ issue une procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt telle que la coordonnée de *u* (*resp. v*, *resp. w*) selon c_1 (*resp.* c_2, *resp.* c_3) est positive.
3) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   Montrer qu'il existe une matrice $S \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que $S \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$ où γ est un réel l'on précisera.
4) Prouver qu'il existe $Q \in O_3(\mathbb{R})$ telle que QA soit triangulaire supérieure.
5) Comparer la matrice *Q* à la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (u, v, w). Conclure.