TD du chapitre 16 : Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien

Exercice 1

Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 1$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = \alpha_i \alpha_j$.

Montrer que *f*, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à *A*, est un projecteur orthogonal sur un sous-espace à préciser.

Exercice 2

Soit $E = C^1([0;1], \mathbb{R})$. Pour tous *f*, *g* de *E*, on pose :

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt .$$

On pose par ailleurs :

$$V = \{ f \in E \setminus f(0) = f(1) = 0 \} \text{ et } W = \{ f \in E \setminus f \in C^2([0;1], \mathbb{R}) \text{ et } f'' = f \}.$$

a. Montrer que $(f, g) \mapsto (f \mid g)$ définit un produit scalaire sur *E*.

b. Prouver que *V* et *W* sont des sous-espaces supplémentaires dans *E* et orthogonaux pour le produit scalaire ci-dessus.

c. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $E_{\alpha,\beta} = \{ f \in E \setminus f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta \}$. Calculer $\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \left(\int_0^1 \left[f(t)^2 + f'(t)^2 \right] dt \right)$.

Exercice 3

Soit *E* un espace vectoriel euclidien, *F* et *G* deux sous-espaces supplémentaires de *E* et *s* la symétrie par rapport à *F* parallèlement à *G*. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *s* est une symétrie orthogonale (*i.e.* $G = F^{\perp}$) ;

(ii) *s* est une isométrie ;

(iii) *s* est un endomorphisme autoadjoint.

Exercice 4

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in O(n)$ et une matrice triangulaire supérieure *R* (« right triangular ») telles que $A = QR$ (Décomposition QR). Quel est l'intérêt de cette décomposition pour la résolution du système linéaire $AX = B$?

☺ *On pourra utiliser l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*

Exercice 5

Soient *E* un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ une famille de *p* vecteurs de *E*. On note $G = G(x_1, x_2, \dots, x_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont $(x_i \mid x_j)$, appelée *matrice de Gram* de la famille $\mathcal{F}$ et $A = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

1) Comparer $rg(A)$ et $rg(\mathcal{F})$.

2) Montrer que $G = A^{\mathsf{T}} A$.

3) Prouver que $\ker(A^{\mathsf{T}}A) = \ker A$ et en déduire que $rg(\mathcal{F}) = rg(G)$.

4) Prouver que $\det G \geq 0$. Dans quel cas a-t-on $\det G = 0$?

5) Soit F un sous-espace de E muni d'une base $(e_1, e_2, ..., e_p)$ et x un vecteur de E. Montrer que :

$$d(x,F)^2 = \frac{\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, e_2, \dots, e_p)}.$$

Exercice 6

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(U_1, U_2, \dots, U_n) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^n$ tels que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $U_k^{\mathsf{T}} U_k = 1$ et $A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_k U_k^{\mathsf{T}}$.

Exercice 7 (*autour des endomorphismes autoadjoints positifs*)

1) Soit E un espace euclidien et $u \in S(E)$ de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ telles que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

   Montrer que pour tout vecteur x non nul de E, on a :

$$\lambda_1 \leq \frac{\left(x \mid u(x)\right)}{\|x\|^2} \leq \lambda_n.$$

2) Montrer que la matrice de Hilbert $H = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est définie positive.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = A^{\mathsf{T}}A$.

   a. Prouver que S est une matrice symétrique positive.

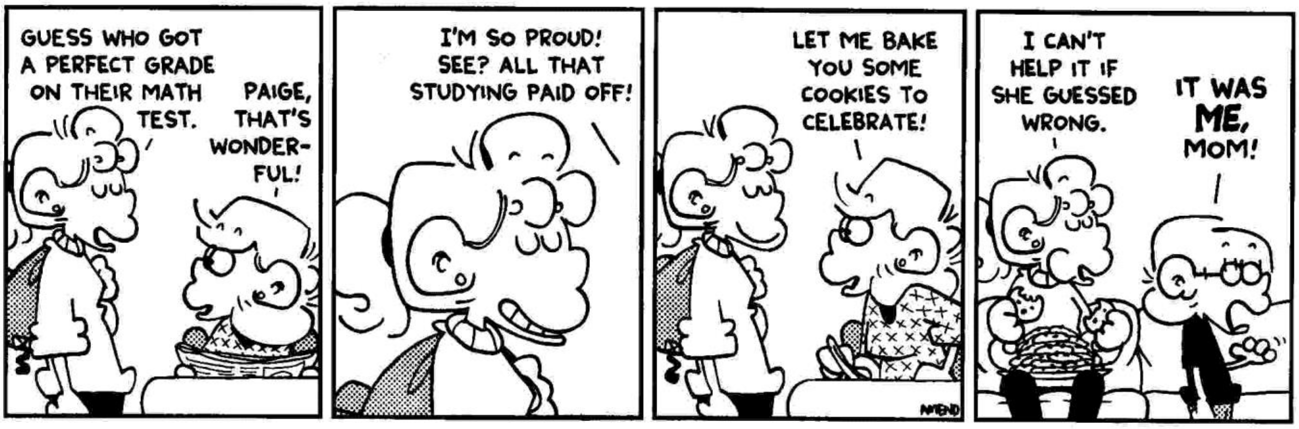
   b. Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^{\mathsf{T}}A$. La matrice A est-t-elle unique ?

   c. Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.

   d. Montrer que $rg(A) = rg(S)$.

4) Soit S une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.

5) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice positive. Montrer que $1 + \sqrt[n]{\det A} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + A)}$.



Exercice 8 (*Centrale*)

On pose $E = S_n(\mathbb{R})$ et on définit la relation < sur *E* par : $A < B \Leftrightarrow \forall\, X \in \mathbb{R}^n,\ X^\top AX \leq X^\top BX$.

1) Montrer que < est une relation d'ordre sur *E*. Est-elle totale ?
2) Montrer que si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de *E*, croissante et majorée pour <, alors elle converge dans *E*.

Exercice 9 (*Mines et plein d'autres…*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que *A* est antisymétrique si et seulement si, pour toute matrice orthogonale *P*, $P^{-1}AP$ est à diagonale nulle.

Dans les questions suivantes, *A* est antisymétrique.

2) Montrer que $I_n + A$ et $I_n - A$ sont inversibles.
3) On pose $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$. Montrer que $B \in SO_n(\mathbb{R})$.
4) Prouver que $I_n + B$ est inversible, puis que $A = (I_n + B)^{-1}(I_n - B)$.

Exercice 10 (*Mines et Centrale*)

Soit *E* un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de *E* et $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de *E*.

1) Montrer que, pour tout $u \in S(E)$, $E = \ker u \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} u$.
2) Soient $u, v \in S^+(E)$. Prouver que $\ker(u+v) = \ker u \cap \ker v$, puis que $\operatorname{Im}(u+v) = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$.