TD du chapitre 14 : Espérance et variance

Exercice 1

<u>*Temps d'attente du deuxième succès*</u>. On répète, de façon indépendante, une expérience aléatoire à l'issue de laquelle on obtient un succès avec une probabilité $p \in]0,1[$. On note X (*resp*. Y) la variable aléatoire donnant le rang du premier (*resp*. deuxième) succès.

1) Retrouver la loi de X et son espérance.
2) Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).
3) En déduire la loi de Y. Déterminer sa fonction génératrice, son espérance et sa variance (si elles existent).

Exercice 2

Soient $a \in \mathbb{R}$, et X et Y deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même loi uniforme sur l'ensemble $E = \ 0,n$. On pose $Z = |X - Y|$ et $T = \inf(X,Y)$.

Sous réserve d'existence, on note $E(A)$ l'espérance d'une variable aléatoire A.

1) a. Justifier l'existence des moments de tous ordres de Z et T.

   b. Montrer que $E(Z) = \dfrac{n(n+2)}{3(n+1)}$.

   c. En déduire $E(T)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.

2) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle qu'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $0 \leq U \leq K$.

   a. Exprimer $\sum\limits_{k=1}^{K} P(U \geq k)$ en fonction de l'espérance de U.

   b. Calculer de même $\sum\limits_{k=1}^{K} k^2 P(U \geq k)$ en fonction de $E(U)$, $E(U^2)$ et $E(U^3)$.

3) a. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la probabilité $P(T \geq k)$.

   b. En utilisant la question 2.a, retrouver la valeur de $E(T)$.

4) Calculer $E(Z^2)$ en fonction de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice 3

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce amenant pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$. On appelle L la longueur de la première série de lancers ayant tous donné le même résultat.

1) Déterminer la loi de L.
2) Calculer l'espérance de L.
3) Montrer que $E(L) \geq 2$. Etudier le cas d'égalité.
4) Calculer la variance de L et en déduire ℓ tel que $L \leq \ell$ avec une probabilité au moins égale à 0,99.

Exercice 4

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'un sac contenant N jetons numérotés de 1 à N dans lequel on peut effectuer une succession de tirages avec remise d'un jeton, en notant, à chaque fois, le numéro obtenu. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note T_n le nombre aléatoire de numéros distincts obtenus au cours des n premiers tirages.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelles sont les valeurs prises par T_n ? Calculer $P(T_n = 1)$, $P(T_n = 2)$ et $P(T_n = n)$.
2) Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leq k \leq N$. Déterminer une relation liant $P(T_{n+1} = k)$, $P(T_n = k)$ et $P(T_n = k-1)$.
3) Pour tout entier naturel n non nul, on considère le polynôme : $G_n(X) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) X^k$.
   a. Prouver l'égalité : $NG_{n+1} = (X - X^2)G_n' + NXG_n$.
   b. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, en reliant l'espérance $E(T_n)$ à G_n, exprimer $E(T_{n+1})$ à l'aide de $E(T_n)$ et N, puis déterminer $E(T_n)$ en fonction de N et n.
   c. Déterminer $\lim_{N \to +\infty} \dfrac{E(T_n)}{N}$.

Exercice 5

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}, \quad Y_n = \frac{X_{n+1} + X_n}{2} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{Y_1 + ... + Y_n}{n}.$$

1) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|S_n - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.
2) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi et l'espérance de Y_n.
3) Pour $m < n$, Y_m et Y_n sont-elles indépendantes ?
4) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|T_n - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) Justifier que la série entière $\sum P(X > n) t^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.
2) Pour $t \in]-1,1[$, exprimer sa somme $H(t)$ en fonction de $G_X(t)$.
3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur H pour que X soit d'espérance finie et, si c'est le cas, exprimer $E(X)$ à l'aide de H.

Exercice 7

La variable aléatoire N donnant le nombre d'électrons produits dans une réaction suit une loi de Poisson de paramètre λ. Les électrons sont efficaces dans une proportion $p \in]0,1[$. On note X et Y les variables aléatoires donnant le nombre d'électrons efficaces et inefficaces respectivement.

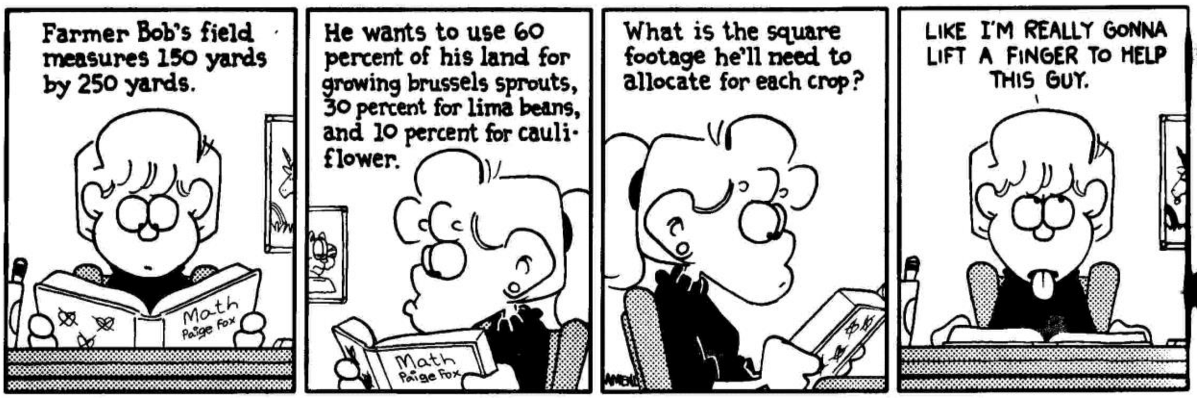
1) Donner la loi de X sous la condition $N = j$.
2) Donner la loi conjointe de (X, N).
3) Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
4) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5) Quel est le signe de la covariance de X et N.

Exercice 8

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables de Bernoulli, de même paramètre $p \in]0,1[$ et mutuellement indépendantes.

On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = UU^\top$.

1) Déterminer la loi de $rg(M)$ et de $tr(M)$.
2) Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?
3) On suppose $n = 2$, on note $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $S = V^\top MV$. Déterminer l'espérance et la variance de S.



Exercice 9 (*Centrale*)

Soit X une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et d'espérance finie.

1) Montrer que $\dfrac{1}{X}$ est d'espérance finie.
2) On suppose dans cette question que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in \left]0,1\right[$.

   Montrer que $\dfrac{1}{E(X)} \leq E\left(\dfrac{1}{X}\right)$.
3) Montrer cette inégalité dans le cas général.

Exercice 10 (*Mines*)

Soit X une variable aléatoire discrète, réelle positive qui admet un moment d'ordre 2 non nul.

Montrer que, pour tout $\lambda \in \left]0,1\right[$, $P\left(X \geq \lambda E(X)\right) \geq (1-\lambda)^2 \dfrac{E(X)^2}{E(X^2)}$.

☺ *On pourra utiliser la variable aléatoire $Y = 1_{(X \geq \lambda E(X))}$ (indicatrice de l'évènement $\left(X \geq \lambda E(X)\right)$) et penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*