TD du chapitre 13 : Variables aléatoires discrètes

Exercice 1

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers *n* correspondants distincts.

On admet que les *n* appels constituent *n* expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0,1[$.

Soit *X* la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1) Donner la loi de *X*. Justifier.
2) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note *Y* la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   a. Soit $i \in \llbracket 0,n \rrbracket$. Déterminer $P(Y=k \mid X=i)$.
   b. Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

☺ *On pourra utiliser l'égalité suivante* : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

Exercice 2

Deux lois de probabilités classiques (mais hors programme).

1) *Loi hypergéométrique* : Cette loi usuelle modélise le tirage simultané de *n* boules dans une urne contenant *N* boules dont une proportion *p* de boules blanches (i.e. il y a *Np* boules blanches). On désigne par Ω l'ensemble des tirages possibles (supposés équiprobables) et par *X* le nombre de boules blanches dans un tirage donné.

   Déterminer $X(\Omega)$ et la loi de *X*. On vérifiera que $P(X=k) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

   Que devient $P(X=k)$ lorsque *N* tend vers l'infini (avec *p* et *n* fixés) ?
2) *Loi triangulaire* : Autre loi usuelle qui modélise la somme *S* de deux variables aléatoires indépendantes *X* et *Y* suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1,n \rrbracket$.

   Déterminer la loi de *S*. Pourquoi l'appelle-t-on "loi triangulaire" ?

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$.

Quelle est la fonction génératrice d'une variable aléatoire *X* suivant une loi uniforme sur $\llbracket 2,2n \rrbracket$?

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\llbracket 1,n \rrbracket$ et suivant une même loi.

En étudiant les racines de $G_{X_1}G_{X_2}$, montrer que X_1+X_2 ne peut pas suivre une loi uniforme sur $\llbracket 2,2n \rrbracket$.

Exercice 4

Un parc d'attraction accueille chaque jour un nombre N variable de visiteurs qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1) Le parc dispose de 4 entrées, numérotées de 1 à 4. Chaque visiteur en choisit une au hasard et sans tenir compte du choix des autres visiteurs. X désigne le nombre de visiteurs par jour qui entrent par l'entrée n° 1.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable aléatoire X sachant que $N = k$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   c. Soit n un entier naturel. Justifier que $P(X = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(N = k) P_{(N=k)}(X = n)$, puis en déduire que X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
2) L'une des attractions du parc est un jeu consistant à lancer une balle dans un trou qui s'éloigne de plus en plus à chaque lancer, de telle sorte que :
   - le premier lancer est réussi de façon certaine ;
   - le second lancer est réussi une fois sur deux ;
   - lorsque les $n-1$ premiers lancers sont réussis, la probabilité de réussir le $n^{\text{ième}}$ lancer est de $1/n$;
   - le jeu s'arrête au premier échec.

   Si i est un entier naturel non nul, S_i désigne l'évènement « le $i^{\text{ème}}$ lancer est réussi » et Z est la variable aléatoire qui correspond au numéro du dernier lancer réussi.
   a. Quelles sont les valeurs prises par Z ?
   b. Soit n un entier naturel non nul donné. Exprimer l'évènement $(Z = n)$ en fonction des évènements S_i ou de leurs contraires. En déduire que $P(Z = n) = \dfrac{n}{(n+1)!}$.
   c. Vérifier que l'on a bien $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(Z = n) = 1$.

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux une même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1) Calculer $P(X \geq m)$.
2) Déterminer les lois de $Z = \min(X,Y)$ et $W = X - Y$.
3) Prouver que les variables aléatoires W et Z sont indépendantes.

Exercice 6

On suppose qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$.

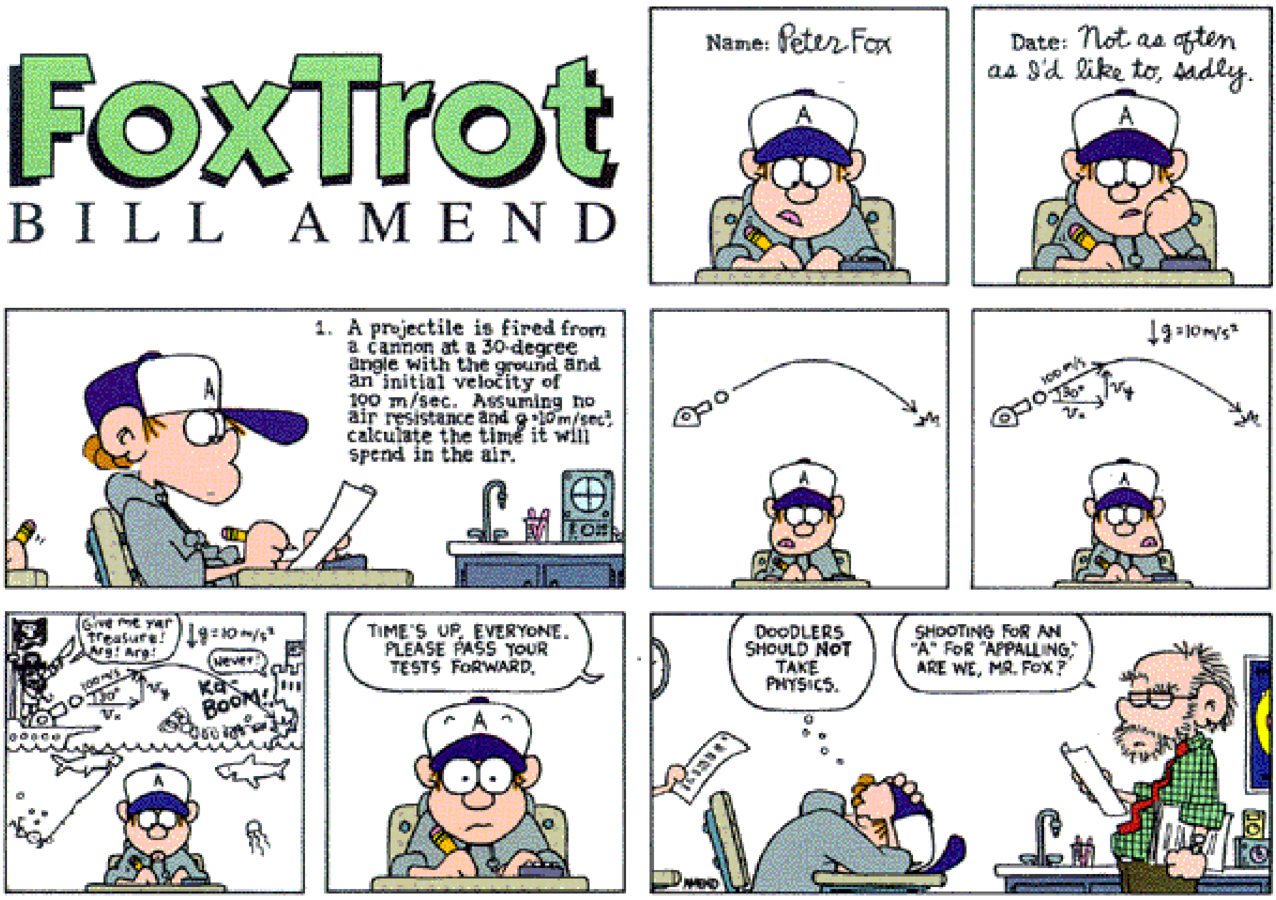
1) Montrer que pour tout entier naturel n, $P(X \leq n) = \dfrac{1}{n!} u_n$ avec $u_n = \int_{\lambda}^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.
2) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3) Soit G_X la fonction génératrice de X. Calculer $G_X(1)$ et $G_X(-1)$.
4) En déduire la probabilité que X prenne une valeur paire.

5) En s'inspirant des questions précédentes, déterminer la probabilité que la valeur de X soit divisible par 4.

6) Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et suivant une loi uniforme sur $\{1;2\}$. Quelle est la probabilité pour que XY soit un entier pair ?

Exercice 7

Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi géométrique. Déterminer la probabilité pour que toutes les solutions de l'équation $y''+(A-1)y'+By=0$ tendent vers 0 en $+\infty$.



Exercice 8 (*Mines*)

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)=\mathbb{Z}$. On suppose en outre que X n'est ni positive presque sûrement, ni négative presque sûrement. On pose :

$$X^+=\max(X,0) \text{ et } X^-=\min(X,0).$$

1) Montrer que X^+ et X^- sont des variables aléatoires.

2) Expliciter la loi conjointe de $\left(X^+,X^-\right)$. Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 (*Mines*)

Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum \lambda_n$ converge.

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la variable X_n suit une loi de Poisson de paramètre λ_n.

1) Montrer que la série de terme général $P(X_n\neq 0)$ converge.

2) Montrer que :

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{k\geq n}\left(X_k\neq 0\right)\right)=0 .$$

3) Prouver que la série $\sum X_n$ est presque sûrement convergente.

4) Soient Y et Z deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t\in[0,1]$:

$$\left|G_Y(t)-G_X(t)\right|\leq P(Y\neq Z) .$$

5) Montrer que $X=\sum_{n=1}^{+\infty}X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n$.

Exercice 10 (*CCP*)

Trois individus A_1, A_2, A_3 (ne se connaissant pas) se présentent dans un bureau de poste comportant deux guichets. Les individus A_1 et A_2 sont pris en charge dès leur arrivée et A_3 doit attendre que A_1 ou A_2 ait fini pour passer à son tour au guichet. Le temps passé au guichet par A_i ($1\leq i\leq 3$) est noté X_i. On suppose que X_i suit une loi géométrique de paramètre $p\in\left]0,1\right[$ (pour les trois). On note Y le temps d'attente de A_3 avant son passage au guichet.

1) Pour $k\in\mathbb{N}$, déterminer $P(Y>k)$. Donner la loi de Y.

2) Soit Z le temps total passé par A_3 à la poste. Donner la loi de Z.

3) Déterminer le temps moyen passé par A_3 à la poste.