TD du chapitre 12 : Espaces probabilisés

Exercice 1

1) Soit $\mathbb{Q}_1$ l'ensemble des nombres rationnels supérieurs ou égaux à 1. Tout élément de $\mathbb{Q}_1$ peut s'écrire $\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers naturels premiers entre eux tels que $p \geq q \geq 1$. On considère l'application f définie sur $\mathbb{Q}_1$ par :

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p(p-1)}{2} + q .$$

a. Justifier que *f* est à images dans $\mathbb{N}^*$.

b. Montrer que 3 n'a pas d'antécédent par *f*. Qu'en déduire pour *f* ?

c. Soient $r = \frac{p}{q}$ et $r' = \frac{p'}{q'}$ deux éléments de $\mathbb{Q}_1$ tels que $f(r) = f(r')$. Quitte à intervertir p et p', on suppose que $p' \geq p$.

i. Montrer que $(p'-p)(p+p'-1) = 2|q'-q|$.

ii. Prouver que $p+p'-1 > |q'-q|$ et en déduire que $p'-p < 2$.

iii. Montrer alors que $r' = r$. Qu'en déduire pour *f* ?

d. En considérant l'application $\tilde{f} : \mathbb{Q}_1 \to f(\mathbb{Q}_1)\,;\, r \mapsto f(r)$, montrer que $\mathbb{Q}_1$ est dénombrable.

e. Prouver alors que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

2) On admet que $[1, +\infty[$ n'est pas dénombrable.

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n(x) = \lfloor 10^n x \rfloor$ et on considère l'application :

$$g : [1, +\infty[\to \mathscr{P}(\mathbb{N})\,;\, x \mapsto \{d_n(x), n \in \mathbb{N}\} .$$

a. Prouver que *g* est injective.

b. En déduire que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice 2

Soit *E* un ensemble non vide.

1) Soit $A \subset E$ fixée. Déterminer la plus petite tribu de *E* contenant *A*.

2) Montrer que $\{A \subset E,\, A \text{ ou } \bar{A} \text{ est fini ou dénombrable}\}$ est une tribu de *E*.

☺ *On admettra que la réunion dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.*

3) La partie $\{A \subset E,\, A \text{ ou } \bar{A} \text{ est fini}\}$ de $\mathscr{P}(E)$ est-elle une tribu de *E* ?

Exercice 3

On lance (une seule fois) une pièce équilibrée, puis on effectue des tirages dans une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire selon la règle suivante :

- on tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne ;
- on ajoute dans l'urne une boule blanche si la pièce avait donné pile, une boule noire sinon.

Ainsi, l'urne contient $k+1$ boules au moment du $k^{ième}$ tirage.

1) Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au $k^{ième}$ tirage ?
2) Quelle est la probabilité p_k d'avoir obtenu pile avec la pièce, sachant qu'on a tiré une boule blanche au $k^{ième}$ tirage ?
3) Quelle est la probabilité d'obtenir *k* boules blanches lors des *k* premiers tirages ?

Exercice 4

Deux archers, Alfred et Barnabé, tirent alternativement sur une cible. Le premier qui atteint la cible gagne. Alfred atteint la cible avec une probabilité $p_1 \in]0,1[$; Barnabé atteint la cible avec une probabilité $p_2 \in]0,1[$. Alfred commence. Les tirs sont indépendants.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité pour que Alfred (*resp*. Barnabé) l'emporte lors du tir numéro $2n+1$ (*resp*. $2n+2$).
2) Calculer la probabilité pour qu'Alfred (*resp*. Barnabé) gagne.
3) Calculer la probabilité pour que le jeu ne se termine jamais.
4) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur p_1 et p_2 pour que le jeu soit équitable.
   Que dire si $p_1 > 0,5$?

Exercice 5

On dispose de deux pièces *A* et *B*, donnant pile avec les probabilités respectives *a* et *b* de $]0,1[$. On choisit au hasard l'une des deux pièces puis on la lance. Si on obtient pile, on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite infinie de lancers.

On définit les événements :

E_n = « on utilise *A* pour la première fois lors du $n^{ième}$ lancer » ;
V_n = « on a obtenu *n* piles lors des *n* premiers lancers ».

1) Calculer $P(E_n)$ et $P(V_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2) En déduire $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n\right)$ et $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V_n\right)$.

Exercice 6

Une information binaire (0/1) est transmise de proche en proche. La personne n° 1 possède l'information 1. Au temps $n \geq 1$, la personne n° *n* transmet son information à la personne n° $n+1$:

- avec une probabilité $p \in]0,1[$ elle transmet l'information dont elle dispose ;
- avec une probabilité $1-p$ elle transmet l'information inverse.

(La personne n° 2 aura donc l'information initiale « 1 » avec probabilité *p*).

Si on note p_n la probabilité que la personne *n* possède la bonne information (l'information initiale : « 1 »), déterminer une relation de récurrence simple vérifiée par les p_n, puis la valeur des p_n.

Quel est le comportement de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque *n* tend vers $+\infty$?

Exercice 7

Une puce saute entre trois points P, Q et R. A chaque étape, elle saute vers l'un des deux autres points avec une probabilité de ½. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = (p_n \ q_n \ r_n)^{\mathsf{T}}$ où p_n, q_n, r_n sont les probabilités respective qu'au temps n, la puce se trouve au point P, Q, R.

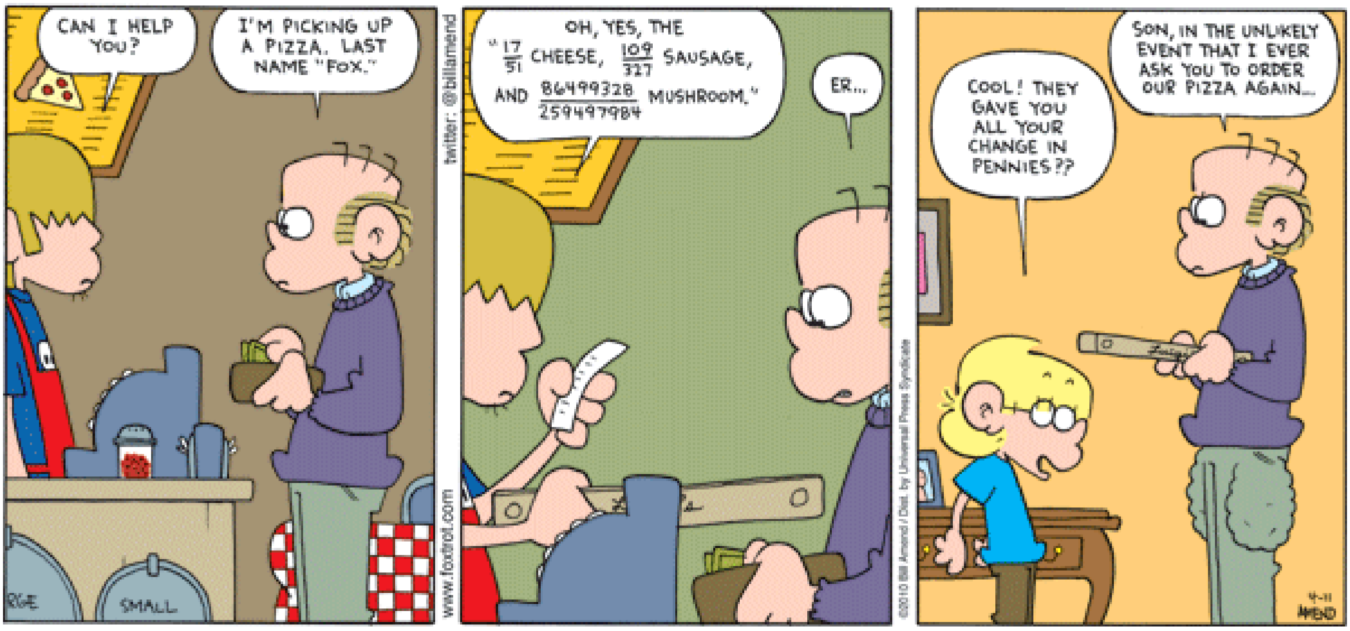
1) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2) Vérifier que $2A^2 = A + I_3$, puis déterminer le reste dans la division euclidienne du polynôme X^n par $(X+½)(X-1)$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Déterminer les éléments propres de A. Retrouver alors A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) Montrer que X_n possède une limite qui ne dépend pas de X_0.

Exercice 8

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille quelconque d'événements. On pose :

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right).$$

1) Montrer que $P(A) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right)$.
2) On suppose dans cette question que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$ converge.
   a. Déterminer $P(A)$.
   b. Soit $\omega \in \Omega$. Déterminer la probabilité que ω appartienne à une infinité de A_n.
   ☺ *Penser aux suites extraites.*
3) On suppose dans cette question que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$ diverge.
   a. Montrer que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$, on a $P\left(\bigcap_{n\leq k\leq m} \overline{A_k} \right) \leq e^{-\sum_{n\leq k\leq m} P(A_k)}$.
   b. Déterminer $P(A)$.



Exercice 9 (*Centrale*)

Soient a et b deux entiers strictement positifs. On place b boules blanches et b boules noires dans une urne. On effectue une succession de tirages avec remise et chaque fois que l'on tire une boule blanche, on rajoute a boules blanches dans l'urne.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement : « on n'a obtenu que des boules blanches au cours des n premiers tirages » et on pose $p_n = P(A_n)$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \dfrac{b+an}{2b+an} p_n$.
2) Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 10 (*Mines*)

On lance indéfiniment un dé standard équilibré.

1) Déterminer $P(E_n)$ où E_n est l'évènement : « aucun 6 n'a été obtenu lors des n premiers lancers ».
2) Déterminer $P(F_k)$ où F_k est l'évènement : « le premier 6 est obtenu au $k^{\text{ième}}$ lancer ».
3) Soit K l'évènement : « 6 n'apparaît jamais ». Exprimer K à l'aide des E_n et en déduire $P(K)$.
4) Exprimer $\overline{K}$ en fonction des F_k, puis retrouver la valeur de $P(K)$.
5) Soient G l'évènement « 6 apparaît une infinité de fois » et H l'évènement « 6 apparaît à tous les lancers, sauf un nombre fini d'entre eux ». Calculer $P(G)$ et $P(H)$.