

**TD du chapitre 11 : Intégrales à paramètre**
**Exercice 1**

Soit  $f \in C([0,1],\mathbb{K})$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^1 f(t^n) dt$ .

Après avoir justifié qu'elle est bien définie, déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 2**

Soit  $\sum a_n$  une série complexe absolument convergente. Pour tout réel  $x$ , on pose  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ .

Montrer que  $S$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ , que  $I = \int_0^{+\infty} S(x)e^{-x} dx$  converge et vaut  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

**Exercice 3 (Deux techniques de calcul d'intégrale)**

1) On pose  $I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$ .

a. Justifier que  $I$  est bien définie.

b. Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} t e^{-(n+1)t}$ .

c. Calculer  $\int_0^{+\infty} t e^{-(n+1)t} dt$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et en déduire  $I$ .

2) On pose  $J(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt$ .

a. Montrer que  $J$  est définie et de classe  $C^1$  sur  $] -1, +\infty[$  et donner  $J'$ .

b. En déduire  $J(x)$  pour tout  $x > -1$ .

**Exercice 4**

Etudier  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2 + e^{-xt}}$ .

**Exercice 5**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose  $f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt$ .

1) Montrer que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2) Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose  $g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x} dt$ .

Montrer que  $g(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  et en déduire un équivalent simple de  $f(x)$  en  $+\infty$ .

3) Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose  $h(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x} dt$ .

Etudier  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  et en déduire un équivalent simple de  $f(x)$  en 0.

**Exercice 6 (Intégrale de Gauss)**

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$  et  $G(x) = \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ .

- 1) Montrer que pour tout  $F$  et  $G$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et donner  $F'$  et  $G'$ .
- 2) Montrer que la fonction  $F + G$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  et en déduire l'intégrale de Gauss :  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .
- 4) Calculer alors  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ .

**Exercice 7 (Transformée de Laplace)**

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur  $\mathbb{R}_+$ , et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

Pour tout  $f \in E$ , on pose :

$$\mathcal{L}(f) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}; x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt.$$

- 1) Montrer que pour tout  $f \in E$ ,  $\mathcal{L}(f)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- 2) Soit  $f \in E$ , donner la limite de  $\mathcal{L}(f)$  en  $+\infty$ .
- 3) Vérifier que  $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  se prolonge par continuité en une fonction  $g$  de  $E$ .  
Calculer  $\mathcal{L}(g)'$  et en déduire  $\mathcal{L}(g)$ .

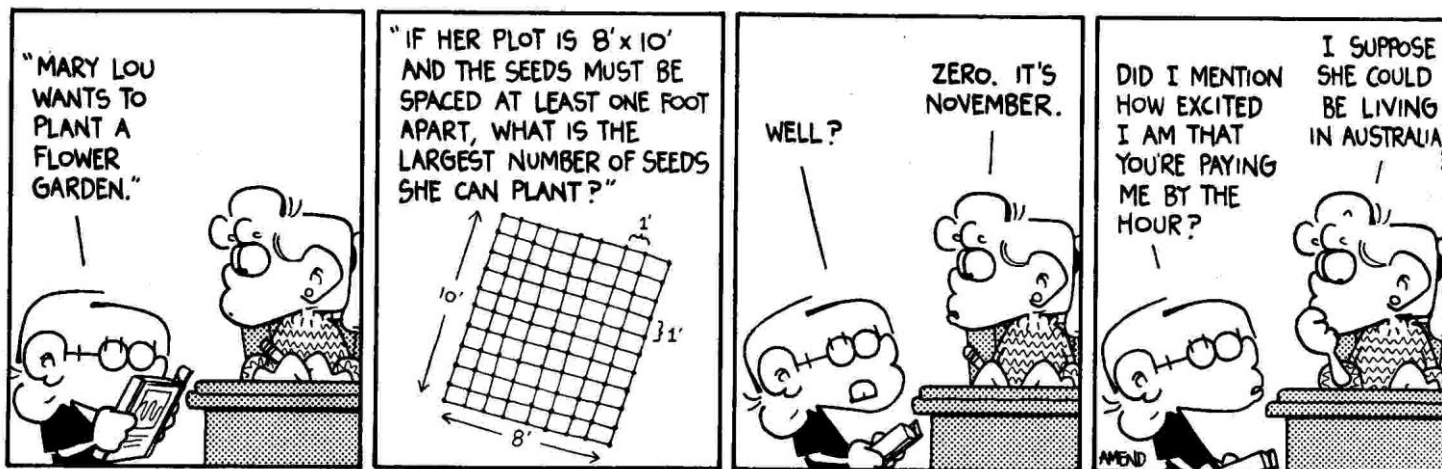
**Exercice 8 (Fonction gamma)**

Pour tout réel  $s > 0$ , On pose  $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ .

- 1) Montrer que  $\Gamma$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et de classe  $C^\infty$  sur cet intervalle.
- 2) Prouver que pour tout réel  $s > 0$ , on a  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ .
- 3) Calculer  $\Gamma(1)$ ,  $\Gamma(m)$  pour  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Gamma(1/2)$ ,  $\Gamma(m+1/2)$  pour  $m \in \mathbb{N}$ .
- 4) Montrer qu'il existe un réel  $\alpha \in ]1, 2[$  tel que  $\Gamma'(\alpha) = 0$ . Prouver que  $\Gamma'$  est croissante et en déduire les variations de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Construire alors le tableau de variation complet de  $\Gamma$ . On donnera un équivalent simple de  $\Gamma$  en 0.
- 5) Montrer que pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [0; m]$ ,  $\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \leq e^{-x}$ . Montrer que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = e^{-x}$ .
- 6) Montrer que  $\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1} dx = \frac{m! m^s}{s(s+1)\dots(s+m)}$ , pour tout réel  $s > 0$  et pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ .  
 ☺ On faire une intégration par parties et prouver que  $\int_0^1 (1-t)^m t^{s-1} dt = \frac{m}{s+m} \int_0^1 (1-t)^{m-1} t^{s-1} dt$ .
- 7) Montrer que pour tout réel  $s > 0$ ,  $\Gamma(s) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m! m^s}{s(s+1)\dots(s+m)}$ .
- 8) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \int_n^{n+1} \ln(\Gamma(t)) dt$ . Donner la nature de  $\sum \frac{(-1)^n}{u_n}$ .  
 ☺ On pourra utiliser  $\varphi : x \mapsto \int_x^{x+1} \ln(\Gamma(t)) dt$ .

### Exercice 9

Montrer que pour tout réel  $x > 0$ , on a  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$ .



### Exercice 10 (Mines)

Justifier l'existence de  $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(\sqrt{t})}$ , puis calculer cette intégrale.

### Exercice 11 (Centrale)

Soit  $f : ]0,1[ \rightarrow \mathbb{R}$ , continue et telle que  $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \lambda t^\alpha$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On pose :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt.$$

- 1) Déterminer le domaine de définition de  $g$ .
- 2) Montrer que  $g$  est continue.
- 3) Montrer que  $g$  est de classe  $C^1$ .
- 4) Sans utiliser le théorème de convergence dominée, déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .

