TD du chapitre 10 : Intégration sur un intervalle

Exercice 1

1) Déterminer la nature des intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$ b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}$ c. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a(\ln t)^b}\quad (a,b)\in\mathbb{R}^2$

d. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}}-a-\frac{b}{x}\right]dx\quad (a,b)\in\mathbb{R}^2$ e. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin^2 x\,dx$

f. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt$ g. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(e^x)\,dx$ h. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3\sin(x^8)\,dx$

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$ et retrouver la convergence de l'intégrale de Dirichlet.

Exercice 2

Convergence, éventuellement suivant la valeur du ou des paramètre(s), et calcul de :

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan t}{t^2}\,dt$ b. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^3}$ c. $\displaystyle\int_0^1\frac{x\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ d. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}\,dx$

e. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}\right)dt\quad (a,b)\in\mathbb{R}^2$ f. $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}}\quad (a\in\mathbb{R})$

g. $\displaystyle\int_0^1 t\left\lfloor\frac{1}{t}\right\rfloor dt$ h. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}\quad (\lambda\in\mathbb{R})$ i. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx$

j. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx$ où $0<a<b$ et f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

k. $\displaystyle\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,dt$. ☺ *Montrer que* $\displaystyle\int_0^x\frac{t-1}{\ln t}\,dt=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,dt$ *, puis justifier que* $\displaystyle\frac{x}{t\ln t}\le\frac{1}{\ln t}\le\frac{x^2}{t\ln t}$ *pour* $t\in[x^2,x]$.

Exercice 3

Dans chaque cas suivant, justifier que F est définie sur D et déterminer un équivalent simple de F en a.

1) $F: x\mapsto\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{t^3+x^2}$, $D=\mathbb{R}_+^*$ et $a=+\infty$.

2) $F: x\mapsto\displaystyle\int_x^1\frac{dt}{(\arctan t)^2}$, $D=\mathbb{R}_+^*$ et $a=0$.

☺ *On pourra montrer que* $f: t\mapsto\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{(\arctan t)^2}$ *est intégrable sur* $]0,1]$.

3) $F: x\mapsto e^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$, $D=\mathbb{R}$ et $a=+\infty$.

4) $F: x\mapsto\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt$, $D=\mathbb{R}_+^*$ et $a=0$.

Exercice 4

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt = 0$.
2) On suppose ici que f est continue en 0. Montrer $\lim\limits_{x\to 0} x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}dt = f(0)$.
3) On suppose ici que f est à images dans $\mathbb{R}$ et décroissante. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x) = 0$.

   ☺ *On pourra utiliser* $g(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$.
4) On suppose ici que f est continue sur $[1,+\infty[$. On pose $u(x) = \frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)dt$ et $v(x) = \frac{f(x)}{x}$.

   Montrer que u et v sont intégrables sur $[1,+\infty[$ et que $\int_1^{+\infty} u = \int_1^{+\infty} v$.

Exercice 5

Soit l'équation différentielle $(E): y' - y = \ln x$.

1) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Existe-t-il des solutions bornées ?

Exercice 6

Soit $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $(f')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\left(\int_{\mathbb{R}}(f')^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}}(f'')^2\right)$.

☺ *On pourra prouver que* $\lim\limits_{-\infty} f'f = \lim\limits_{+\infty} f'f = 0$.

Exercice 7

Soit $f \in C(]0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

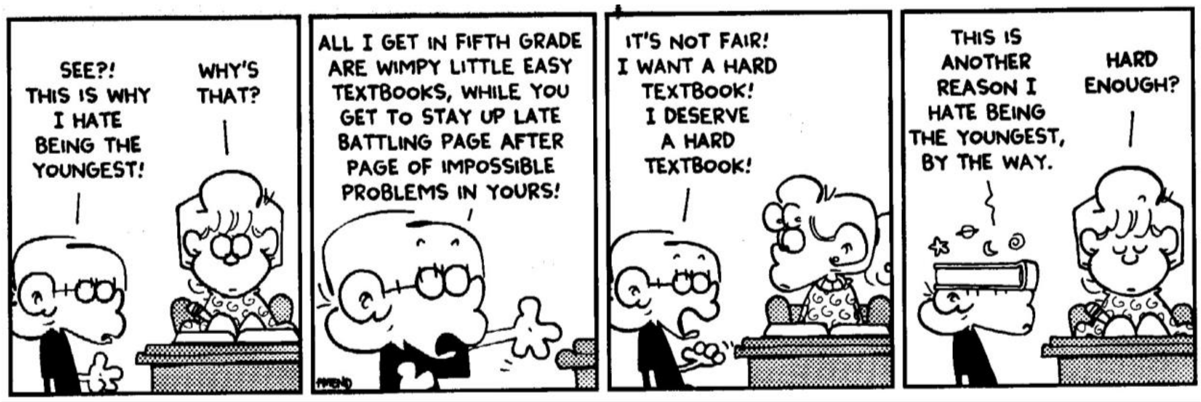
1) On prend ici $f(x) = \ln x$. A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t)dt$?
2) On suppose ici que f est monotone, que $\int_0^1 f(t)dt$ converge et $\lim\limits_{x\to 0} x f(x) = 0$.

   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 8

On note $L^2(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues par morceaux et de carré intégrable sur I, autrement dit telles que $\int_I f^2$ converge.

1) Justifier que pour tous $a,b \in \mathbb{R}$, on a $|ab| \leq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.
2) Montrer que, uni des lois usuelles, $L^2(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3) Prouver que l'application $(f,g) \mapsto \int_I fg$ est un produit scalaire sur $L^2(I,\mathbb{R}) \cap C^0(I,\mathbb{R})$.



Exercice 9 (*Mines - augmenté*)

Pour tout réel $x>0$, on pose $f(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$.

1) Montrer que *f* est définie et se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

2) Prouver la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et calculer cette intégrale.

Exercice 10

Soit $f:[1,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ continue et telle que $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Montrer que $\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$ converge.

Exercice 11 (*X PC*)

On pose $I=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,dt$ et $J=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,dt$.

1) Montrer que les fonctions $t\mapsto\ln(\cos t)$ et $t\mapsto\ln(\sin t)$ sont intégrables sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, donc que les intégrales I et J sont bien définies.
2) Montrer que $I=J$.
3) Trouver une relation entre $I+J$ et I, puis en déduire la valeur de I et J.