# *TD du chapitre 1 : Séries numériques*

### *Exercice 1*

Déterminer la nature de la série $\Sigma u_n$ avec :

a. $u_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

b. $u_n = \ln\left(1+\sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

c. $u_n = \dfrac{j^n}{\sqrt{n}}$ ( $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ).

d. $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$. On donnera un équivalent de la somme partielle $S_n$ en + ∞.

e. $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$. On donnera un développement asymptotique de $R_n$, le reste d'ordre *n*, en + ∞.

### *Exercice 2*

Convergence et somme de $\Sigma u_n$ avec :

a. $u_n = \dfrac{1}{1^2+2^2+3^2+...+n^2}$ (*Mines*).

b. $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ (*Centrale*).

☺ *On pourra commencer par déterminer le développement asymptotique à deux termes de* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

*On rappelle que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ *où* $\gamma$ *est la constante d'Euler*.

### *Exercice 3* (*Mines*)

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (3k-1)^{1/n}$.

### *Exercice 4* (*Centrale*)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1) Déterminer la nature de la série $\Sigma u_n$.

2) Etablir une relation entre $u_{n+1}$ et $\Sigma u_n^2$, puis déterminer un équivalent de $u_n$.

### *Exercice 5* (*Centrale*)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $(E_n)$ l'équation $e^x = x^n$.

1) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $(E_n)$ admet exactement deux solutions strictement positives que l'on notera $x_n$ et $y_n$, avec $0 < x_n < y_n$.

2) Montrer que $(x_n)_{n\geq 3}$ converge vers 1.

3) Déterminer la nature de la série $\Sigma u_n$ avec $u_n = \dfrac{x_n - 1}{y_n}$.

## *Exercice 6*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1-\dfrac{\alpha}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ avec $\alpha>0$.

On pose $v_n=\ln(n^\alpha u_n)$. En étudiant la série $\Sigma(v_{n+1}-v_n)$, montrer que $v$ converge, puis étudier la convergence de $\Sigma u_n$ suivant la valeur de $\alpha$.

## *Exercice 7*

1) Soit la série $\sum u_n$ de terme général $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ et $\sigma$ la permutation de $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ :

$$\begin{cases}\sigma(3k)=2k\\ \sigma(3k-1)=4k-1\\ \sigma(3k-2)=4k-3\end{cases}$$

   a. Prouver que $\sigma$ est bien une permutation de $\mathbb{N}^*$.

   b. Donner la nature de la série $\sum u_n$, puis déterminer celle de $\sum u_{\sigma(n)}$.

   ☺ *Faire une sommation par paquets de 3.*

2) Soit la série $\sum u_n$ de terme général $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\sigma$ la permutation de $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ :

$$\begin{cases}\sigma(3k)=4k\\ \sigma(3k-1)=4k-2\\ \sigma(3k-2)=2k-1\end{cases}$$

   Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{\sigma(n)}$ convergent, mais $\sum_{n=1}^{+\infty}u_{\sigma(n)}=\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$.

## *Exercice 8*

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\dfrac{\sin n}{n}$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\int_0^1 t\cos(nt)dt+v_n$ avec $v_n=\dfrac{1-\cos n}{n^2}$.
2) On pose $f(t)=\dfrac{t}{\sin t}$. Montrer que $f$ se prolonge en une fonction de classe $C^1$ sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.
3) Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in[0;1]$, $\sum_{k=1}^{n}t\cos(kt)=f\left(\dfrac{t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)-\dfrac{1}{2}t$.
4) En déduire que la série $\sum u_n$ converge.
5) Déterminer la nature de la série $\sum\dfrac{e^{in}}{n}$.

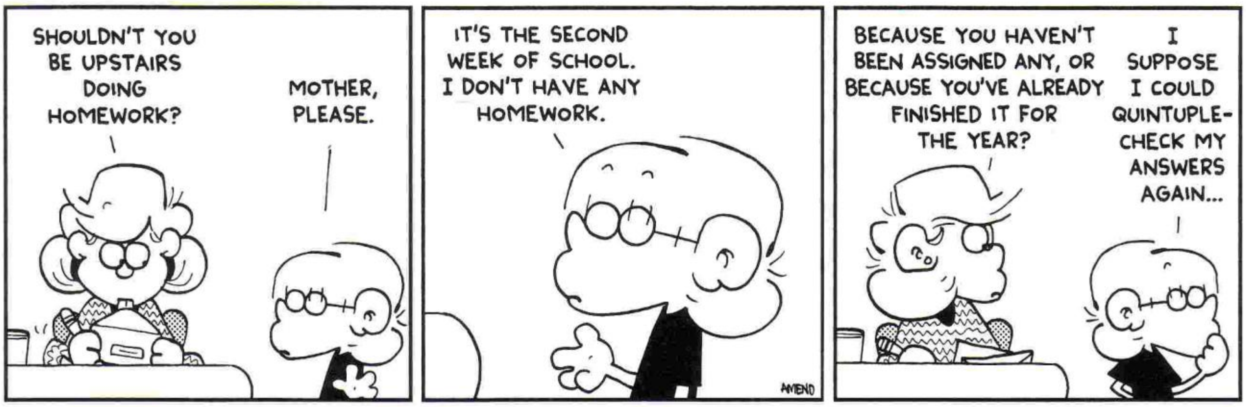
## *Exercice 9*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante à termes positifs telle que $\sum u_n$ converge. On note $R_n$ le reste d'ordre *n*.

Montrer que $u_n=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, puis que si $\sum R_n$ converge alors $\sum nu_n$ converge vers la même somme.

### *Exercice 10*

Soit $x \in ]-1;1[$. En étudiant $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2$, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$.




### *Exercice 11* (*Centrale*)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\cos(\ln n)}{n}$ et $I_n = \int_1^n \frac{\cos(\ln t)}{t}\,dt$.

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

☺ *On pourra considérer la fonction* $f : x \mapsto \int_1^x \frac{\cos(\ln t)}{t}\,dt$ *et écrire une formule de Taylor adéquate.*

### *Exercice 12* (*X-ENS*)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels strictement positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$ et $\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = \Delta a_n - \Delta a_{n+1}$, et on suppose que $\Delta^2 a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Qu'en déduire ?
2) Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$, on a $n\Delta a_n \leq (p-1)\Delta a_n + a_p - a_{n+1}$.
3) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} n\Delta a_n = 0$.
4) Montrer que la série $\sum (n+1)\Delta^2 a_n$ converge et donner sa somme.
5) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle quelconque. On note $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_k$.

   On suppose que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\lim_{n\to+\infty} a_n v_n = 0$. Montrer que la série $\sum a_n u_n$ converge.