Analyse

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}.$$

Partie A

1) Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On rappelle f ce prolongement.
2) Prouver que f est impaire.
3) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
4) Déterminer le développement limité à l'ordre 6 de f en 0.
5) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f en 1.
6) Déterminer le développement asymptotique de f comportant trois termes au voisinage de $+\infty$.
7) Déterminer l'équivalent le plus simple possible de f en $-\infty$.
8) Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
9) Justifier que f réalise une bijection de $[-1;1]$ vers un intervalle I que l'on précisera.
10) Justifier que f^{-1} est de classe C^2 sur I.
11) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f^{-1} en 0.

Partie B

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0;1[$.
2) Etudier le sens de variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Justifier de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Partie C

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Prouver qu'il existe un unique réel $x_n \in]0;1[$ tel que $f(x_n) = \frac{1}{n}$.
2) Etudier la suite $(x_n)_{n\geq 2}$.
3) Déterminer la nature de la série $\sum x_n$.

Partie D

1) Déterminer la nature de la série $\sum f(n)$.
2) On pose $w_n = f(n) - 2\frac{\ln n}{n}$. Montrer que $\sum w_n$ converge.
3) A l'aide de la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ et en utilisant la comparaison série-intégrale, déterminer l'équivalent le plus simple de la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$.

Partie E

Soit l'équation différentielle (E) : $x^2y''+3xy'+y=\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$.

1) Prouver que qu'une fonction g est solution de (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement la fonction h' est solution de (E') sur I, avec $h(x)=xg(x)$ et $(E'): xy'+y=\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$.
2) Résoudre (E') sur tout intervalle I ne contenant pas 0.
3) Déterminer une primitive de $x\mapsto \dfrac{1}{x(1+x^2)}$ et en déduire les solutions de (E) sur I.
4) Montrer que (E) admet une unique solution maximale sur $\mathbb{R}$ et donner cette solution.

Algèbre

Soient $a\in\mathbb{R}$ et $f:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]$; $P\mapsto 2(X+a)P-(X-a)^2P'$.

Partie A

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2) Calculer $f(X^n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3) Déterminer le ou les éventuel(s) entier(s) n tel(s) que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f.
4) On note u l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_2[X]$ (c'est-à-dire que pour tout $P\in\mathbb{R}_2[X]$, $u(P)=f(P)$). Déterminer la matrice A de u dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
5) Pour quelles valeurs de a l'application u est-elle injective ? surjective ?
6) Pour quelles valeurs de a l'application f est-elle injective ? surjective ?

Partie B

On cherche les éléments propres de f, autrement dit, les couples $(\lambda,P)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}[X]\backslash\{0\}$ tels que $f(P)=\lambda P$.

Soit $(\lambda,P)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}[X]\backslash\{0\}$ un éventuel couple vérifiant $f(P)=\lambda P$.

1) Montrer que pour tout $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\deg Q\neq 2$, on a $\deg f(Q)=1+\deg Q$.
2) En déduire le degré de P.
3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(X-a)^2P^{(n+1)}=\left[2(1-n)X+2(n+1)a-\lambda\right]P^{(n)}-n(n-3)P^{(n-1)}$.
4) Soit r une racine réelle ou complexe de P. Montrer par l'absurde que $r=a$.
5) Justifier que $f(P)=u(P)$ et en déduire que $\det(A-\lambda I_3)=0$.
6) Calculer $\det(A-\lambda I_3)$ et déterminer les valeurs possibles de λ.
7) Déterminer alors tous les éléments propres de f.

Partie C

On prend ici $a = 1$.

On rappelle que u est l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_2[X]$ et A est la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On pose $N = A - 4I_3$.

1) Calculer A^{-1}.
2) Montrer que la matrice N est nilpotente (admet une puissance nulle) et déterminer le plus petit entier naturel p tel que $N^p = 0_3$.
3) En déduire que A^{-1} peut s'écrire comme un polynôme en A que l'on donnera.
4) Déterminer le rang de N et celui de N^2.
5) On pose $v = u - 4id_{\mathbb{R}_2[X]}$, $P_1 = v^2(X^2)$, $P_2 = v(X^2)$ et $P_3 = X^2$.
   Montrer que $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
6) Donner la matrice P de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$, ainsi que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_c$.
7) Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
8) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9) La matrice $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle semblable à A ?

   On pourra, en justifiant, utiliser la fait que A et B sont semblables si et seulement si N et $B - 4I_3$ le sont.

Partie D

On prend toujours $a = 1$ ici.

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire canonique (c'est-à-dire du produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée).

1) Existe-t-il des polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ orthogonaux à leur image par u ? Si oui, les donner.
2) Déterminer $\left(\text{Vect}\left(X^2 + X + 1, u(X^2 + X + 1)\right)\right)^{\perp}$.
3) La base $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est-elle orthonormée ? Si elle ne l'est pas, l'orthonormaliser en une base orthonormée (Q_1, Q_2, Q_3) par le procédé de Gram-Schmidt.
4) Déterminer la matrice de p, la projection orthogonale sur $\text{Vect}(P_1, P_2)$ dans la base $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$, puis dans la base la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
5) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Détermine la distance de P à $\text{Vect}(P_1, P_2)$ en fonction de a, b et c.

Polynômes, nombres complexes et trigonométrie

Exercice I

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $P_n = (X+1)^n - X^n$.

1) Donner le degré de P_n, son coefficient dominant et son terme constant.
2) Déterminer les racines complexes de P_n sous forme algébrique.
3) Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
4) En déduire $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Probabilités

Exercice II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance plusieurs fois de suite une pièce qui tombe sur pile avec la probabilité $p \in]0,1[$.
A chaque lancer, si pile sort, on marque 3 points, si face sort, on marque 2 points.

1) Résoudre l'équation $2x + 3y = 0$ dans $\mathbb{Z}^2$.
2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $2x + 3y = k$ dans $\mathbb{N}^2$.

   On déterminera les valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$ pour lesquelles $2x + 3y = k$ n'a aucune solution dans $\mathbb{N}^2$.
3) On lance la pièce n fois avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on appelle S_n la variable aléatoire donnant la somme des points obtenus à l'issue des n tirages.
   a. Déterminer (en justifiant) $S_n(\Omega)$.
   b. Donner la loi de S_n.
   c. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
   d. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on appelle X_k la variable aléatoire valant 1 si pile sort au $k^{\text{ième}}$ lancer et 0 sinon. Retrouver $E(S_n)$ à l'aide des X_k.
4) On choisit maintenant l'entier N au hasard dans $\mathbb{N}^*$ avec la probabilité $P(N = n) = \dfrac{1}{2^n}$.

   Pour un entier $k \geq 2$, déterminer la probabilité que la somme des points obtenus à l'issue des N tirages soit égale à k. On laissera le résultat sous forme d'une somme.

Exercice III

A partir d'un jeu classique de 32 cartes (quatre couleurs : trèfle, carreau, cœur, pique – huit niveaux par couleur : du 7 à l'as), on distribue une main de 5 cartes à un joueur. Les 27 cartes restantes constituent la pioche. Les mains sont équiprobables.

Un full est une main constituée de 3 cartes d'un même niveau et 2 cartes d'un autre niveau, par exemple : 3 rois et 2 dames.

Un brelan est une main constituée de 3 cartes d'un même niveau et 2 cartes de deux autres niveaux différents, par exemple : 3 rois, 1 dame et un as.

Le joueur a la possibilité de remplacer entre 0 et 5 cartes de sa main par autant de cartes de la pioche.

1) Quelle est la probabilité que le joueur ait un full servi (avant échange) ?
2) Quelle est la probabilité que le joueur ait exactement deux paires servies (avant échange) ?
3) Le joueur a exactement deux paires servies et échange la cinquième carte.
   a. Quelle est la probabilité que le joueur ait un full après échange ?
   b. Quelle est la probabilité que le joueur ait exactement deux paires servies avant échange et un full après échange de la cinquième carte ?
4) Quelle est la probabilité que le joueur ait exactement un brelan servi (avant échange) ?
5) Le joueur a un brelan servi et échange les deux autres cartes.
   a. Quelle est la probabilité que le joueur ait un full après échange ?
   b. Quelle est la probabilité que le joueur ait un brelan servi avant échange et un full après échange des deux autres cartes ?
6) Le joueur a un brelan servi et échange une seule des deux autres cartes.
   a. Quelle est la probabilité que le joueur ait un full après échange ?
   b. Quelle est la probabilité que le joueur ait un brelan servi avant échange et un full après échange des deux autres cartes ?
   c. Quelle est la meilleure stratégie : échanger une seule ou deux cartes ?

Exercice IV

Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps. Le jour 0, il fait beau.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les évènements :

- A_n = « Il fait beau le jour *n* » ;
- B_n = « Il pleut le jour *n* » ;
- C_n = « Il neige le jour *n* ».

On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$ et $X_n = {}^t\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$.

1) Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = MX_n$.
2) Montrer que $M = PDP^{-1}$ avec $D = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
3) Calculer alors M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire a_n, b_n et c_n en fonction de *n*.

Exercice V

On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. A chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on marque un point.

Pour $n \geq 2$, soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issu de *n* lancers.

1) Déterminer les lois, les espérances et les variances de X_2 et X_3.

2) Soit $n \geq 2$, quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n ? Déterminer $P\left(X_n = 0\right)$ et $P\left(X_n = n-1\right)$.

3) Soit $n \geq 2$, soit $k \in [\![1,n]\!]$, montrer que :

$$P\left(X_{n+1} = k\right) = \frac{1}{2} P\left(X_n = k\right) + \frac{1}{2} P\left(X_n = k-1\right).$$

4) Soit $n \geq 2$. On pose :

$$Q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,;\, s \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} P\left(X_n = k\right) s^k .$$

(i) Calculer $Q_n(1)$ et montrer que $Q_n'(1) = E(X_n)$. Exprimer $V(X_n)$ à l'aide de Q_n' et Q_n''.

(ii) Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a :

$$Q_{n+1}(s) = \frac{1+s}{2} Q_n(s) .$$

(iii) En déduire une expression de $Q_n(s)$ en fonction de *n* et de *s*.

(iv) Calculer alors l'espérance et la variance de X_n.