Résumé du chapitre 9 : Calcul différentiel

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On note $(.|.)$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

I - Dérivabilité et opérations sur les fonctions dérivables

Dans cette partie, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t \mapsto f(t)$ est une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$, donc les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont concernées ici. Plus généralement, on peut remplacer $\mathbb{R}^n$ par un espace euclidien E de dimension n.

I-1. Généralités

Définitions :

Soit $a \in I$.

Le taux d'accroissement ou taux de variation de *f* entre *a* et *t* est $\dfrac{1}{t-a}\big(f(t)-f(a)\big)$.

On dit que *f* est dérivable en *a* si le taux d'accroissement de *f* entre *a* et *t* admet une limite (vectorielle) finie quand *t* tend vers *a*. Cette limite, notée $f'(a)$, est appelée dérivée de *f* en *a*.

On dit que *f* est dérivable sur *I* si elle est dérivable en tout point de *I*.

Dans ce cas, la fonction $t \mapsto f'(t)$ est appelée fonction dérivée de *f*.

Propriété et définition :

La fonction *f* est dérivable en *a* si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(t) = f(a) + (t-a)\ell + \underset{a}{o}(t-a).$$

Dans ce cas, le vecteur ℓ est le vecteur dérivé $f'(a)$ et la relation ci-dessus est appelée développement limité d'ordre 1 de *f* en *a*.

I-2. Opérations

Propriétés :

Soient *f* et *g* deux fonctions définies sur *I* et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- Si *f* et *g* sont dérivables en $a \in I$, alors pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en *a*, de nombre dérivé $\lambda f'(a) + \mu g'(a)$.
- Si *f* et *g* sont dérivables sur *I*, alors pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur *I*, de fonction dérivée $\lambda f' + \mu g'$.

Propriété :

Si *f* et *h* sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ respectivement et toutes deux dérivables sur *I*, alors hf est dérivable sur *I* et $(hf)' = h'f + hf'$.

Propriétés :

Soient *f* et *g* deux fonctions dérivables sur *I* et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, alors $L \circ f$ est dérivable sur *I*, de dérivée $L \circ f'$.
- Si *B* est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$, alors la fonction (à valeurs réelles) $B(f,g)$ est dérivable sur *I*, de dérivée $B(f',g)+B(f,g')$.
- Si *M* est une application *p*-linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et $f_1, f_2, \dots, f_p$ sont des fonctions dérivables sur *I* et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors la fonction (à valeurs réelles) $M\left(f_1, f_2, \dots, f_p\right)$ est dérivable sur *I*, de dérivée :
$$\sum_{i=1}^{p} M\left(f_1, \dots, f_i', \dots, f_p\right).$$
- Si *J* est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \to I$ dérivable, alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur *J*, de dérivée $\varphi'.(f' \circ \varphi)$.

Corollaires :

Soient *f* et *g* deux fonctions dérivables sur *I* et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- $(f \mid g)$ est dérivable sur *I* et $(f \mid g)' = (f' \mid g) + (f \mid g')$.
- Si $n = 2$, $\det(f,g)$ est dérivable sur *I* et $\left(\det(f,g)\right)' = \det(f',g) + \det(f,g')$.
- $\|f\|$ est dérivable en tout point *t* de *I* où $f(t) \neq 0$ et $\|f\|' = \dfrac{(f' \mid f)}{\|f\|}$.

I-3. Fonctions de classe C^k

Définitions :

Soit *k* un entier naturel non nul.

Si on note $f^{(0)} = f$, on dit que *f* est k fois dérivable sur *I* si *f* est $k-1$ dérivable sur *I* et sa dérivée $(k-1)^{ième}$ est dérivable sur *I*. La dérivée $k^{ième}$ de *f* est notée $f^{(k)}$, $\dfrac{d^k f}{dt^k}$, parfois $D^k f$.

On dit que *f* est indéfiniment dérivable sur *I*, si elle est *k* fois dérivable sur *I* pour tout entier naturel *k*.

Pour $0 \le k \le \infty$, on dit que *f* est de classe C^k sur *I* si *f* est *k* fois dérivable sur *I* et $f^{(k)}$ est continue sur *I* (si $k < \infty$).

Notation : On note $C^k(I, \mathbb{R}^n)$, l'ensemble des fonctions de classe C^k sur *I* et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Propriété :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $t \in I$, on note $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ les coordonnées de $f(t)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la fonction *f* est de classe C^k sur *I* si et seulement les fonctions $f_1, f_2, \dots, f_n$ de sont et dans ce cas, on a $f^{(k)} = f_1^{(k)} e_1 + f_2^{(k)} e_2 + \dots + f_n^{(k)} e_n$.

Propriétés :

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, f et g deux fonctions de classe C^k sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est de classe C^k sur I, avec $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$.
- Si h est une fonction de classe C^k sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors hf est de classe C^k sur I.
- Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, alors $L \circ f$ est de classe C^k sur I et $(L \circ f)^{(k)} = L \circ f^{(k)}$.
- Si B est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$, alors $B(f, g)$ est de classe C^k sur I, en particulier $(f \mid g)$ et $\det(f, g)$ quand $n = 2$.
- Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \to I$ de classe C^k, alors $f \circ \varphi$ est de classe C^k sur J.
- $\|f\|$ est de classe C^k en tout point t de I où $f(t) \neq 0$.

II - Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

II-1. Introduction aux systèmes différentiels (*hors programme*)

II-2. Résultats généraux

Dans toute cette partie, on considère l'équation différentielle :

$$(E) :\ y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On note $(H) :\ y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ l'équation homogène associée et $S_{(E)}$ (*resp.* $S_{(H)}$) l'ensemble des solutions de (E) (*resp.* de (H)) sur I.

Théorèmes :

- L'ensemble $S_{(H)}$ des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $C^2(I, \mathbb{K})$, de dimension 2.
- L'équation (E) admet des solutions sur I et si y_p est une solution particulière de (E), alors :

$$S_{(E)} = \left\{ y_p + y_h \setminus y_h \in S_{(H)} \right\}.$$

- *Théorème de Cauchy-Lipschitz* : Pour $t_0 \in I$ et $(y_0, y'_0) \in \mathbb{K}^2$, le problème de Cauchy formé par (E) et les conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
- *Principe de superposition* : Si $c = c_1 + c_2$ où c_1 et c_2 sont deux fonctions continues sur I, alors une fonction f est une solution de (E) sur I si et seulement si $f = f_1 + f_2$ avec f_1 solution de $(E_i) :\ y'' + a(t)y' + b(t)y = c_i(t)$ pour $i \in \{1, 2\}$.

II-3. Techniques de résolution

a. Changement de fonction inconnue avec abaissement de l'ordre de l'équation :

On peut chercher deux fonctions c et d, avec c dérivable et d continue sur I, telles que $z = y' + cy$ vérifie $z' + dz = y'' + ay' + by = c$. Une autre technique est possible si on connait déjà une solution φ de l'équation homogène (H) qui ne s'annule pas sur I. On peut alors chercher une autre solution sous la forme $y = z\varphi$.

b. Changement de variable :

Dans certain cas, un changement de variable permet d'aboutir à une équation plus simple (par exemple, à coefficients constants). Si la variable initiale est t, on pose $u = \varphi(t)$ avec φ bijective et au moins deux fois dérivable sur I. Dans cas, si $t \mapsto y(t)$ est solution, alors on pose $z(u) = y\left(\varphi^{-1}(u)\right)$.

Il faut alors faire attention aux ensembles de définition (par exemple, il faut que t varie dans $I \subset \mathbb{R}_+^*$ pour pouvoir poser $u = \ln t$).

c. Recherche de solutions développables en série entière :

Tout est dans le titre… Se placer a priori sur un intervalle $]-R, R[$ avec $R > 0$.

III - Fonctions de plusieurs variables

L'étude des limites et de la continuité de fonctions entre deux espaces vectoriels normés (entre autres les fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles) a été vue dans le chapitre sur les espaces normés.

Dans toute cette partie, p est un entier naturel non nul, l'espace $\mathbb{R}^p$ *est normé (sauf mention contraire, on utilisera la norme euclidienne canonique).On note* $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^p$.

Enfin, f est une fonction définie sur U, un ouvert de $\mathbb{R}^p$*, et à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

III-1. Fonctions de classe C^1

a. Dérivée en un point selon un vecteur :

Définition :

Soient deux vecteurs $a \in U$ et $u \in \mathbb{R}^p$ tel que $u \neq 0$.

Si la fonction $t \mapsto f(a + tu)$ est dérivable en 0, on dit que *f* admet une dérivée en *a* selon le vecteur *u*.

b. Dérivées partielles premières :

On note $x_1, x_2, \dots, x_p$ *les coordonnées d'un vecteur* x *de* $\mathbb{R}^p$ *dans la base canonique* $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_p)$.

Définition :

Soit $a \in U$ et $i \in [\![1, p]\!]$.

Si *f* admet une dérivée en *a* suivant e_i, on l'appelle dérivée partielle (d'ordre 1) par rapport à x_i et on la note $\partial_i f(a)$ ou (plus souvent) $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Propriété :

Soit $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$ et $i \in [\![1, p]\!]$.

Si on note $f_i : x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_p)$ l'application partielle, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_i'(a_i).$$

Autrement dit, si elle existe, la dérivée partielle est la dérivée de l'application partielle.

c. Classe C^1 :

Définition :

Soit $a \in U$.

La fonction f est de classe C^1 en a (*resp.* sur U) si ses dérivées partielles d'ordre 1 en a (*resp.* sur U) existent et sont continues en a (*resp.* sur U).

Notation : On note $C^1(U,\mathbb{R})$ (ou $C^1(U)$, si ce n'est pas ambigu) l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur U.

Théorème :

Si f est de classe C^1 sur U, alors elle admet en tout point a de U un développement limité d'ordre 1 de la forme :

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\underset{h\to 0}{o}\left(\|h\|\right)$$

avec $h=(h_1,\dots,h_p)$.

Corollaire 1 :

Une fonction de classe C^1 sur U est continue sur U.

Corollaire 2 :

Si f est de classe C^1 sur U, alors pour tous $a \in U$, $u \in \mathbb{R}^p$ tel que $u \neq 0$:

$$f(a+tu)=f(a)+\left(\sum_{i=1}^{p} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)t+\underset{t\to 0}{o}(t).$$

III-2. Gradient et différentielle

Définitions :

Si f admet des dérivées partielles en a, alors le gradient de f en a est le vecteur $\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)e_i$, noté $\nabla f(a)$.

La différentielle de f en a, notée $df(a)$, est (quand elle est définie) la forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$:

$$df(a):(h_1,\dots,h_p)\mapsto df(a)\cdot h=\left(h\mid \nabla f(a)\right)=\sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

avec $h=\begin{pmatrix}h_1 & \dots & h_p\end{pmatrix}^{\top}$.

III-3. Opérations sur les fonctions de classe C^1

a. Opérations usuelles :

Propriétés :

- $\left(C^1(U,\mathbb{R}),+,.\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel stable par produit.
- Si f et g sont deux fonctions de classe C^1 sur U telles que g ne s'annule pas sur U, alors $\frac{f}{g}$ est de classe C^1 sur U.

b. Règle de la chaîne :

Propriété : (*règle de la chaîne*)

Si f est de classe C^1 sur U et $\varphi : I \to U\,;\, t \mapsto \left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_p(t)\right)$ est une application de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $f \circ \varphi$ est de classe C^1 sur I avec pour tout $t \in I$:

$$(f \circ \varphi)'(t) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\varphi(t)\right) = \left(\varphi'(t) \mid \nabla f\left(\varphi(t)\right)\right).$$

Corollaire :

Si f est de classe C^1 sur U (ouvert de $\mathbb{R}^2$ ici) et $\varphi : (u,v) \mapsto \left(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)\right)$ est une application de classe C^1 sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans U, alors $F = f \circ \varphi$ est de classe C^1 sur V avec :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\varphi(u,v)\right) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\varphi(u,v)\right) \\ \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\varphi(u,v)\right) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\varphi(u,v)\right) \end{cases}$$

Dans le plan ($\mathbb{R}^2$), les coordonnées polaires sont (r, θ) avec :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

où (x, y) sont les coordonnées cartésiennes.

L'application $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et, avec $f(x,y) = F(r,\theta)$, les formules de la propriété ci-dessus s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r} = \cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta} = -r\sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

D'où l'on peut tirer :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta \dfrac{\partial F}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\sin\theta \dfrac{\partial F}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta \dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\cos\theta \dfrac{\partial F}{\partial \theta} \end{cases}$$

c. Inégalité des accroissements finis :

Propriété : *Inégalité des accroissements finis*

On suppose que U est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$, f est de classe C^1 sur U et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in U$, on a $\|\nabla f(x)\| \le M$. Alors, pour tous $a, b \in U$:

$$|f(a) - f(b)| \le M\,\|a - b\|.$$

Corollaire :

> On suppose que U est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et que f est de classe C^1 sur U.
>
> Alors, f est constante sur U si et seulement si $\nabla f = 0$ sur U.

III-4. Extremum local, global

Définitions :

> On dit que f admet un maximum (*resp.* minimum) local en a si, au voisinage de a, $f(x) \leq f(a)$ (*resp.* $f(x) \geq f(a)$).
>
> On dit que f admet un maximum (*resp.* minimum) global en a si, pour tout $x \in U$, $f(x) \leq f(a)$ (*resp.* $f(x) \geq f(a)$).
>
> Dans les deux cas, on parle d'extremum local ou global.
>
> Si f admet des dérivées partielles sur U, on dit que a est un point critique si $\nabla f(a) = 0$, autrement dit, si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

Propriété :

> Si f est de classe C^1 sur U et admet un extremum (local ou global) en a, alors a est un point critique.

III-5. Recherche d'extremums

Pour déterminer les extremums d'une fonction de classe C^1, on procède en deux étapes.

- On cherche les points critiques dans U.
- En chaque point critique a, on détermine si on est en présence d'un extremum ou pas.

  Pour cela, on peut faire un développement limité en 0 de $\varphi_u : t \mapsto f(a+tu) - f(a)$ avec u un vecteur fixé non nul de $\mathbb{R}^p$. Comme U est ouvert est $a \in U$

  Si, quels que soit le vecteur u de $\mathbb{R}^p$, le premier terme du développement limité est toujours du même signe, alors on a un extremum *local* : un minimum si ce terme est positif, un maximum sinon.

III-6. Fonctions de classe C^2

Les dérivées partielles d'ordre 2 ou secondes sont les dérivées partielles des dérivées partielles.

Elles sont notées $\partial^2_{i,j} f$ ou (plus souvent) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ (pour $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$) et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ (pour $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$).

Définition :

> On dit qu'une fonction f est de classe C^2 sur U si f est de classe C^1 sur U, ainsi que toutes ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Notation : On note $C^2(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Propriété :

> $\left(C^2(U,\mathbb{R}),+,.\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel stable par produit et quotient quand il est défini.

Théorème (de Schwarz) :

> Si f est de classe C^2 sur U, alors pour tous $i, j \in [\![1, p]\!]$, on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

III-7. Équations aux dérivées partielles

Comme pour les fonctions d'une variable, on peut chercher à résoudre des équations différentielles dont l'inconnue est une fonction de plusieurs variables et mettant en jeu les dérivées partielles d'ordre 1, 2, ou plus de la fonction.

III-8. Matrice hessienne

Définition :

> Soit f une fonction de classe C^2 sur U et $a \in U$.
>
> La matrice $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1\leq i,j\leq p}$ est appelée matrice hessienne de f en a, notée $H_f(a)$.

Théorème : (*formule de Taylor-Young à l'ordre 2*)

> Si f est de classe C^2 sur U, alors elle admet en tout point a de U un développement limité d'ordre 2 de la forme :
>
> $$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + h^{\mathsf{T}} \nabla f(a) + \frac{1}{2} h^{\mathsf{T}} H_f(a) h + \underset{h\to 0}{o}\left(\|h\|^2\right) \\ &= f(a) + \left(h \mid \nabla f(a)\right) + \frac{1}{2}\left(h \mid H_f(a) h\right) + \underset{h\to 0}{o}\left(\|h\|^2\right) \end{aligned}$$
>
> avec $h = \left(h_1 \;\; \ldots \;\; h_p\right)^{\mathsf{T}}$.