Résumé du chapitre 8 : Réduction d'endomorphisme

Dans tout le chapitre, n est un entier naturel non nul, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I - Eléments propres

I-1. Généralités

Propriété :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et D une droite de E.

Si D est stable par u, alors, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in D$, $u(x) = \lambda x$.

Propriété :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les (éventuels) sous-espaces propres de u sont stables par u.

Propriété :

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent ($uv = vu$), alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Propriété :

Si le spectre est fini et non vide, les sous-espaces propres d'un endomorphisme (*resp*. d'une matrice carrée) sont en somme directe.

I-2. Polynôme caractéristique

Propriété :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (*resp*. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Si χ_u (*resp*. χ_A) est scindé, de racines $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (distinctes ou non), alors :

$$\det u = \lambda_1 \times ... \times \lambda_n \qquad (\textit{resp. } \det A = \lambda_1 \times ... \times \lambda_n).$$

$$tr(u) = \lambda_1 + ... + \lambda_n \qquad (\textit{resp. } tr(A) = \lambda_1 + ... + \lambda_n).$$

Propriété :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si F est un sous-espace de E stable par u et u_F est l'endomorphisme induit sur F, alors le polynôme caractéristique de u_F divise celui de u.

Définition :

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ (*resp*. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u (*resp*. de A).

La multiplicité de λ dans χ_u (*resp*. χ_A) est appelé <u>multiplicité de la valeur propre</u> λ.

Propriété :

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, λ une valeur de u de multiplicité n_λ et E_λ le sous-espace propre associé. On a :
> $$\dim E_\lambda \leq n_\lambda .$$

II - Diagonalisation

II-1. Définition

Définition :

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
>
> On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
>
> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
>
> On dit que A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

II-2. Caractérisation

Propriété :

> Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) de ses sous-espaces propres est égale à E.

Corollaires :

- Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n, la dimension de E.
- Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$ et si la dimension de tout sous-espace propre associé une valeur propre λ est égale à la multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$, alors u est diagonalisable.

II-3. Exemples d'applications

a. Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, il existe $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (les λ_i étant les valeurs propres de A) et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$. On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

avec $D^k = diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$.

b. Application à la résolution des récurrences linéaires à coefficients constants :

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_k u_{n+k} + \dots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n .$$

Les a_k étant des scalaires fixés et $p \in \mathbb{N}^*$.

Si on pose $X_n = \left(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1}\right)^\top$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_{n+1} = AX_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$

III - Diagonalisation et polynômes annulateurs

Dans tout ce qui suit, on considère un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$. Toutes les propriétés données s'adaptent immédiatement à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

III-1. Nouvelles caractérisations de diagonalisation

Propriété :

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est annulateur de *u*, alors pour toute valeur propre λ de *u*, on a $P(\lambda) = 0$.

Propriété :

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont sables par *u*.

Théorème :

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. Il en va de même pour une matrice carrée.

Propriété :

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il admet $P = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur.

III-2. Cas des endomorphismes induits

Propriété :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable et *F* un sous-espace vectoriel de *E* stable par *u*. L'endomorphisme induit par *u* sur *F* est diagonalisable.

III-3. Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème : (*de Cayley-Hamilton*)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Autrement dit, le polynôme caractéristique de *u* est un polynôme annulateur de *u*.

IV – Trigonalisation

Définition :

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
>
> On dit que u est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
>
> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
>
> On dit que A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice est triangulaire supérieure.

Propriété :

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (*resp.* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).
>
> L'endomorphisme u (*resp*. la matrice A) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps $\mathbb{K}$.