Résumé du chapitre 6 : Compléments d'algèbre linéaire

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I - Produit et somme d'espaces vectoriels

I-1. Produit d'espaces vectoriels

Dans cette partie, on considère $E_1, E_2, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition :

Le produit cartésien de $E_1, E_2, \dots, E_p$ est l'ensemble noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$, tel que :

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_p), \forall\, i \in \; 1, p \;\;, x_i \in E_i \right\}.$$

Propriété :

Muni des lois ci-dessus, $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété :

Si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont de dimension finie, respectivement $n_1, n_2, \dots, n_p$, alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est de dimension finie qui est $n_1 + n_2 + \dots + n_p$.

I-2. Somme d'espaces vectoriels

a. Somme et somme directe :

Propriété et définition :

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces de E (avec $p \in \mathbb{N}^*$).

L'ensemble $\left\{ x_1 + x_2 + \dots + x_p, (x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé somme de $F_1, F_2, \dots$ et F_p et noté $F_1 + F_2 + \dots + F_p$.

De plus, on dit que la somme est directe s'il y a unicité de la décomposition de tout vecteur x de $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ en $x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$, avec $x_i \in F_i$ pour tout $i \in \; 1, p \;$.

On note alors $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$.

Propriété :

Si $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de E (avec $p \in \mathbb{N}^*$), on a :

$$F_1 + F_2 + \dots + F_p = \mathrm{Vect}\left(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_p \right).$$

b. Caractérisation d’une somme directe :

Propriété :

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces de E (avec $p \in \mathbb{N}^*$).

On a $F_1 + F_2 + \dots + F_p = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ si et seulement si :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0 \text{ avec } x_i \in F_i \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0.$$

c. Cas de la dimension finie :

Dans cette partie, E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Propriétés et définitions :

Si F est un sous-espace de E et $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base de F, on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E, dite adaptée à F.

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces de E (avec $p \in \mathbb{N}^*$) tels que $E = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} F_i$. Si, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\mathcal{B}_k$ est une base de F_k, alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E, dite adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$.

Propriété :

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $n_1, n_2, \dots, n_p$ des entiers naturels non nuls dont la somme vaut n (où p est un entier supérieur ou égal à 2). On pose pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $N_k = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

Si, pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, on pose $F_k = \mathrm{Vect}(e_{N_k+1}, e_{N_k+2}, \dots, e_{N_{k+1}})$, alors $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_{p-1}$.

Propriété :

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces de E (avec $p \in \mathbb{N}^*$). On a :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

II - Matrices et endomorphismes

Dans cette partie, E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, respectivement $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

II-1. Matrices et applications linéaires : rappels fondamentaux de première année

Voir les résumés de PCSI.

Définition :

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, s’il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Propriétés :

- La relation « est semblable à » est une relation d’équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: elle est réflexive, symétrique et transitive.

- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = M_{\mathcal{B}'}(u)$ sont semblables avec la relation $B = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ (ou d'un espace E de dimension n) dans des bases différentes.

II-2. Polynôme d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

a. Généralités :

Définitions :

Un polynôme de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + ... + a_{p-1} A^{p-1} + a_p A^p$$

avec $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Un polynôme d'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de E de la forme :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k = a_0 id_E + a_1 u + ... + a_{p-1} u^{p-1} + a_p u^p$$

avec $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Propriété :

Si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ et tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$P\left(M_{\mathcal{B}}(u)\right) = M_{\mathcal{B}}\left(P(u)\right).$$

Propriétés :

Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ et tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

Propriétés :

Soit A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telles que $B = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les matrices A^k et B^k sont semblables avec la même matrice de passage P :

$$B^k = P^{-1}A^k P.$$

- Pour tout $f \in \mathbb{K}[X]$, les matrices $f(A)$ et $f(B)$ sont semblables avec la même matrice de passage P :

$$f(B) = P^{-1} f(A) P.$$

b. Polynôme annulateur :

Définitions :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que P est un polynôme annulateur de la matrice A si $P(A) = 0_n$.

- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que P est un <u>polynôme annulateur de l'endomorphisme u</u> si $P(u) = 0$.

<u>Propriété</u> :

L'ensemble des polynômes annulateurs d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

<u>Propriété</u> :

Toute matrice carrée admet des polynômes annulateurs non nuls.

c. <u>Application au calcul des puissances d'une matrice</u> :

Ce qui suit s'adapte sans mal au calcul des puissances d'un endomorphisme.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur non nul de A. Quitte à diviser par son coefficient dominant, on peut supposer que P est unitaire. Si $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, $P(A) = 0_n$ peut se récrire :

$$A^p = -a_{p-1}A^{p-1} - \ldots - a_1 A - a_0 I_n .$$

Une récurrence simple permet de prouver qu'alors, toute puissance de A est une combinaison linéaire de $I_n, A, \ldots, A^{p-1}$.

d. <u>Application au calcul de l'inverse d'une matrice</u> :

Ce qui suit s'adapte sans mal au calcul de la réciproque d'un automorphisme.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = a_p X^p + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A tel que $a_0 \neq 0$.

Comme $P \neq 0$, $\deg P \geq 1$ et on peut écrire :

$$P(A) = a_p A^p + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0_n \quad \Leftrightarrow \quad \left(-\frac{a_p}{a_0} A^{p-1} - \ldots - \frac{a_1}{a_0} I_n \right) A = I_n .$$

Donc, A est inversible, d'inverse $-\dfrac{a_p}{a_0} A^{p-1} - \ldots - \dfrac{a_1}{a_0} I_n$.

II-3. <u>Matrices par blocs</u>

<u>Définition</u> :

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que M est définie <u>par blocs</u> si :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

avec $A \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r,p-s}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,s}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r,p-s}(\mathbb{K})$ où $r \in [\![1,n]\!]$ et $s \in [\![1,p]\!]$.

On peut généraliser à plus de quatre blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,r} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s,1} & A_{s,2} & \cdots & A_{s,r} \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour une matrice carrée, on peut parler de <u>matrice diagonale par blocs</u> (*resp.* <u>triangulaire supérieure par blocs</u>, *resp.* <u>triangulaire inférieure par blocs</u>), qui est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_q \end{pmatrix} \quad \left(\textit{resp.} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,r} \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{s-1,r} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{s,r} \end{pmatrix}, \ \textit{resp.} \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{s,1} & \cdots & A_{s,r-1} & A_{s,r} \end{pmatrix} \right)$$

avec $A_i \in \mathcal{M}_{r_i}(\mathbb{K})$ pour tout $i \in [\![1, q]\!]$.

Propriétés :

Soit deux matrices par blocs $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ et $M' = \left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right)$ (les blocs ayant les mêmes dimensions.

On a :

- $\lambda M + \mu M' = \left(\begin{array}{c|c} \lambda A + \mu E & \lambda B + \mu F \\ \hline \lambda C + \mu G & \lambda D + \mu H \end{array}\right)$.
- $M^{\top} = \left(\begin{array}{c|c} A^{\top} & C^{\top} \\ \hline B^{\top} & D^{\top} \end{array}\right)$.
- $MM' = \left(\begin{array}{c|c} AE + BG & AF + BH \\ \hline CE + DG & CF + DH \end{array}\right)$.

II-4. Stabilité par un endomorphisme

Définitions et propriété :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Dans ce cas, l'application de F dans F qui à $x \in F$ associe $u(x)$ est un endomorphisme de F, appelé endomorphisme induit par u sur F.

Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme :

- Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par u et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E où $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F ($\mathcal{B}$ est une base adaptée à F).

  Alors, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $e_j \in F$ donc $u(e_j) \in F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, et la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{n-p,p} & D \end{array}\right)$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

- Réciproquement, si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet, dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E, une matrice de la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{n-p,p} & D \end{array}\right)$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ (M est une matrice triangulaire par blocs), alors $F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est stable par u.

Interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs :

- Enfin, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant, dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E, une matrice diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_q \end{pmatrix}$ avec $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{K})$ pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ (donc $n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$). Si on pose $N_0 = 0$, $N_k = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et $F_k = \text{Vect}(e_{N_k+1}, \dots, e_{N_{k+1}})$ pour tout $k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$, alors tous les F_k sont stables par u.

Propriété :

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Si *f* et *g* commutent alors le noyau et l'image de *f* sont stables par *g*.

III - Trace

III-1. Trace d'une matrice

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle trace de A la somme de ses éléments diagonaux, on la note $Tr(A)$ ou $tr(A)$.

Propriétés :

- L'application $tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
- Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a $tr(AB) = tr(BA)$.
- Deux matrices semblables ont même trace.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $tr(A^\top) = tr(A)$.

III-2. Trace d'un endomorphisme

Dans cette partie, E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Propriété et définition :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, le scalaire $tr\left(M_{\mathcal{B}}(u)\right)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ et est appelé trace de u, noté $Tr(u)$ ou $tr(u)$.

Propriétés :

- L'application $tr : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
- $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $tr(uv) = tr(vu)$.