Résumé du chapitre 3 : Limites et continuité

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; on considère deux $\mathbb{K}$- EVN : $\left(E,\|\cdot\|_E\right)$ et $\left(F,\|\cdot\|_F\right)$, *A une partie de E et f une application de A dans F.*

I – Limites

I-1. Généralités

Définition :

> Soit a un point adhérent à A et $b\in F$. On dit que <u>f admet b pour limite en a</u> si :
> $$\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\,\alpha\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall\,x\in A\setminus\{a\},\ \|x-a\|_E\leq\alpha\ \Rightarrow\ \|f(x)-b\|_F\leq\varepsilon\,.$$

Propriétés :

- Si une f admet une limite en un point adhérent à A alors cette limite est unique.
- Toute fonction admettant une limite en $a\in\overline{A}$ est bornée au voisinage de a.

Propriété :

> Soient $a\in\overline{A}$ et $b\in F$. Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b\neq 0_F$, alors $f(x)\neq 0_F$ au voisinage de a.

Propriété :

> Soient $a\in\overline{A}$ et $b\in F$.
>
> Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ pour $\|\cdot\|_E$ de E (*resp.* $\|\cdot\|_F$ de F), alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ pour toute norme de E (*resp.* de F) équivalente à $\|\cdot\|_E$ (*resp.* $\|\cdot\|_F$).

Propriété :

> Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, alors pour tout vecteur u non nul de E, on a $\lim\limits_{t\to 0}f(a+tu)=b$.

I-2. Caractérisation séquentielle de la limite

Propriété :

> Soient $a\in\overline{A}$ et $b\in F$.
>
> On a $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=b$ pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A telle que $x_n\to a$.

I-3. Cas de la dimension finie

Propriété :

On suppose que F est de dimension finie $p > 0$.

Soient $a \in \overline{A}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une base F et $b \in F$ de coordonnées $(b_1, b_2, ..., b_p)$ dans $\mathcal{B}$.

Si $f_k(x)$ est la $k^{\text{ième}}$ coordonnée de $f(x)$ dans $\mathcal{B}$, on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f_k(x) = b_k$ pour tout entier k compris entre 1 et p.

I-4. Opérations

Propriété :

Soient $a \in \overline{A}$, et f_1 et f_2 deux applications de A dans F telles que $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b_1$ et $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b_2$ avec $(b_1, b_2) \in F^2$.

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lim\limits_{x\to a}\left(\lambda f_1(x) + \mu f_2(x)\right) = \lambda b_1 + \mu b_2$.
- Soit $g : A \to \mathbb{K}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lambda \in \mathbb{K}$. On a $\lim\limits_{x\to a} g(x) f_1(x) = \lambda b_1$.

Propriété :

Soient $\left(G, \|\cdot\|_G\right)$ un troisième EVN, g une application de $B \subset F$ dans G et $a \in \overline{A}$.

Si $f(A) \subset B \subset F$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \overline{B}$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c \in G$ avec $g(b) = c$ si $b \in B$, alors $g \circ f$ est définie sur A et $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = c$.

II – Continuité sur une partie

II-1. Définitions

Définitions :

Soit $a \in A$. On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Soit $B \subset A$. On dit que est f est continue sur B si f est continue en tout point de B.

II-2. Continuité et topologie

Propriétés :

Soit f une application continue de E dans F.

L'image réciproque d'un fermé de F est un fermé de E.

L'image réciproque d'un ouvert de F est un fermé de E.

Corollaires :

Soit f une application continue de E dans $\mathbb{R}$.

- L'ensemble des vecteurs x de E tels que $f(x) \geq 0$ (*resp.* $f(x) = 0$ ou $f(x) \leq 0$) est un fermé de E.
- l'ensemble des vecteurs x de E tels que $f(x) > 0$ (*resp.* $f(x) \neq 0$ ou $f(x) < 0$) est un ouvert de E.

II-3. <u>Opérations</u>

<u>Propriétés</u> :

Soient f_1 et f_2 deux applications de A dans F continues en $a \in A$ (*resp*. sur $B \subset A$).

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f_1 + \mu f_2$ est continue en $a \in A$ (*resp*. sur *B*).
- Si $g : A \to \mathbb{K}$ est continue en $a \in A$ (*resp*. sur *B*), alors $g\, f_1$ est continue en *a* (*resp*. sur *B*).
- Soient $\left(G, \|\cdot\|_G\right)$ un EVN et *g* une application d'une partie *C* de *F* dans *G*.

  Si *g* est continue en $f(a) \in C$ (*resp*. sur $f(B) \subset C$), alors $g \circ f$ est continue en *a* (*resp*. sur *B*).

II-4. <u>Cas de la dimension finie</u>

<u>Propriété</u> :

On suppose que *F* est de dimension finie $p > 0$ et on considère une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ de *F*.

Pour tout $x \in A$ et tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $f_k(x)$ la $k^{\text{ième}}$ coordonnée de $f(x)$ dans $\mathcal{B}$.

L'application *f* est continue en $a \in A$ (*resp*. sur $B \subset A$) si et seulement si f_k l'est pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

<u>Définition</u> :

On suppose que *E* est de dimension finie $n > 0$. Soit une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de *E*.

Une <u>application polynomiale</u> sur *E* est une application de *E* dans $\mathbb{K}$ de la forme :

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 ... + x_n e_n \mapsto \sum_{i=0}^{N} a_i \left(\prod_{1 \le k \le n} x_k^{\alpha_{i,k}} \right)$$

où les a_i sont des scalaires, et *N* et les $\alpha_{i,k}$ sont des entiers naturels.

<u>Propriété</u> :

Les applications polynomiales de *E* (de dimension finie) dans $\mathbb{K}$ sont continues sur *E*.

Exemples :

- L'application déterminant $A = (a_{i,j}) \mapsto \det A$ est polynomiale sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- L'application $(A, B) \mapsto AB$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. En effet, les coefficients de AB sont polynomiaux en ceux de *A* et *B*.
- Il en découle immédiatement que à *A* fixée, $B \mapsto AB$ est continue sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et à *B* fixée, $B \mapsto AB$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

<u>Propriété</u> :

Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est continue.

<u>Définition</u> : (*hors programme*)

En dimension finie, une partie fermée et bornée est appelée partie <u>compacte</u>.

Théorème :

On suppose que E est de dimension finie.

Toute application continue sur une partie non vide compacte de E et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est bornée et atteint ses bornes.

II-5. Fonctions lipschitziennes

Définition :

Une application $f : A \to F$ est lipschitzienne sur A s'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $(x, y) \in A^2$:

$$\| f(x) - f(y) \|_F \leq k \| x - y \|_E .$$

Dans ce cas, on dit que f est k-lipschitzienne sur A.

Propriété :

Toute application lipschitzienne est continue.

Théorème :

Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est lipschitzienne.

Propriété :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(E_1, \| \cdot \|_1), \dots, (E_n, \| \cdot \|_n)$ des espaces vectoriels normés de dimension finie et f une application multilinéaire de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F.

- Il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$, $\| f(x_1, x_2, \dots, x_n) \|_F \leq K \|x_1\|_1 . \|x_2\|_2 \dots \|x_n\|_n$.
- f est continue.