

**Résumé du chapitre 18 : Applications géométriques des fonctions vectorielles**

## I - Arcs paramétrés

### I-1. Définition

Définitions :

Soit  $t \mapsto \vec{f}(t)$  une application définie sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

L'arc paramétré ou courbe paramétrée associé(e) à  $\vec{f}$  est l'ensemble des points  $M(t)$  du  $\mathbb{R}^n$  tels que pour tout  $t \in D$ , on a  $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{f}(t)$  où  $O$  est une origine de  $\mathbb{R}^n$  (considéré ici comme un espace affine).

Si  $\vec{f}$  est de classe  $C^k$ , avec  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , on dit que l'arc paramétré est de classe  $C^k$ .

Dans la suite, le plan affine usuel est muni de son repère orthonormé direct canonique  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ ) et, pour tout  $t \in D$ , on note  $x(t)$  et  $y(t)$  les coordonnées de  $\vec{f}(t)$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ . On a donc  $\vec{f} : t \mapsto (x(t), y(t))$  et  $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{f}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ .

On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe paramétrée associée à  $\vec{f}$

Tout ceci se généralise à  $\vec{f} : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{f} : t \mapsto (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

### I-2. Construction d'arcs paramétrés du plan

a. Réduction de l'ensemble d'étude :

Comme pour les fonctions numériques, certaines propriétés de  $\vec{f}$  induisent des symétries de la courbe  $\mathcal{C}$  et permettent de réduire l'ensemble d'étude.

Périodicité :

Si  $x$  et  $y$  sont  $T$ -périodiques avec  $T > 0$  (i.e.  $t \in D \Leftrightarrow t+T \in D$  et pour tout  $t \in D$ ,  $\vec{f}(t+T) = \vec{f}(t)$ ), alors la courbe est parcourue entièrement quand  $t$  décrit l'intersection de  $D$  et d'un intervalle de longueur  $T$ , par exemple  $D \cap [0; T]$  ou  $D \cap \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$  (ce dernier cas est souvent préféré pour faire des études de parité).

Symétries :

On peut éventuellement établir des symétries de la courbe si  $D$  est symétrique par rapport à 0 et si les fonctions  $x$  et  $y$  sont paires ou impaires. Si pour tout  $t \in D$ ,  $-t \in D$  et :

- $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$ , alors la courbe est parcourue deux fois ;
- $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$ , alors la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ , la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses ;
- $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ , alors la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère ;

- $\begin{cases} x(-t) = y(t) \\ y(-t) = x(t) \end{cases}$ , alors la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice d'équation  $y = x$ .

b. Variations et limites :

Comme pour une fonction numérique usuelle, on étudie les variations (dérivées) et les limites des deux fonctions  $x$  et  $y$  sur leur ensemble de définition commun (éventuellement réduit). On dresse alors un tableau de variations synthétique.

c. Tangentes :

Définitions :

On suppose que  $t \mapsto \vec{f}(t)$  est dérivable en  $t_0$ .

Si  $\vec{f}'(t_0) \neq \vec{0}$  (i.e.  $x'(t_0) \neq 0$  ou  $y'(t_0) \neq 0$ ) alors on dit que  $M(t_0)$  est un point régulier.

Si  $\vec{f}'(t_0) = \vec{0}$  (i.e.  $x'(t_0) = 0$  et  $y'(t_0) = 0$ ) alors on dit que  $M(t_0)$  est un point stationnaire ou singulier.

Si tous les points de la courbe sont réguliers, on dit qu'elle est régulière.

On suppose que  $t \mapsto \vec{f}(t)$  est deux fois dérivable en  $t_0$ .

Si la famille  $(\vec{f}'(t_0), \vec{f}''(t_0))$  est libre, on dit que  $M(t_0)$  est un point birégulier.

Si tous les points de la courbe sont biréguliers, on dit qu'elle est birégulière.

Définitions :

On suppose que  $t \mapsto \vec{f}(t)$  est définie au voisinage de  $t_0$ .

La courbe associée à  $\vec{f}$  admet une tangente en  $M(t_0)$  si l'on peut trouver une fonction vectorielle  $\vec{u}(t)$  telle que  $\vec{u}(t)$  soit un vecteur directeur de la corde  $(M(t_0)M(t))$  et  $t \mapsto \vec{u}(t)$  admet une limite finie non nulle quand  $t$  tend vers  $t_0$ . Cette limite est un vecteur tangent à la courbe au point considéré.

Quand la courbe admet une tangente, la normale à la courbe est la droite perpendiculaire à la tangente au point considéré. Un vecteur normal est un vecteur directeur de la normale à la courbe.

Propriété :

Si  $t \mapsto \vec{f}(t)$  est définie au voisinage de  $t_0$  et  $M(t_0)$  est un point régulier, alors la courbe admet une tangente dirigée par  $\vec{f}'(t_0)$ .

*Que faire dans le cas d'un point stationnaire ?*

- 1) Quelques fois (voire souvent),  $x'(t)$  et  $y'(t)$  ont un facteur commun  $h(t)$  qui crée l'annulation simultanée des deux dérivées en  $t_0$  et tel que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{h(t)} \vec{f}'(t) = \vec{u} \neq \vec{0}$ . Ce vecteur  $\vec{u}$  dirige alors la tangente.
- 2) Il y a une propriété qui dit que si  $\vec{f}$  est plusieurs fois dérivable en  $t_0$ , alors la tangente est dirigée par le premier vecteur  $\vec{f}^{(k)}(t_0)$  non nul.

d. Branches infinies :Définition :

La courbe associée à une fonction  $t \mapsto \vec{f}(t)$  admet une branche infinie s'il existe  $t_0$  (éventuellement infini) tel que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\vec{f}(t)\| = +\infty$ .

Plusieurs cas de figure se présentent :

$$1) \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm \infty \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} : \text{la courbe admet une asymptote horizontale d'équation } y = y_0.$$

$$2) \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm \infty \end{cases} : \text{la courbe admet une asymptote verticale d'équation } x = x_0.$$

$$3) \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm \infty \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm \infty \end{cases} : \text{on étudie alors } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}.$$

- Si cette limite est infinie, on dit qu'il y a une branche parabolique (de direction verticale).
- Si cette limite vaut  $a \in \mathbb{R}$  alors on dit qu'il y a une direction asymptotique  $y = ax$  (ou branche parabolique de direction  $y = ax$ , horizontale si  $a = 0$ ).
- Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - ax(t)] = b \in \mathbb{R}$ , alors la courbe admet une asymptote oblique d'équation  $y = ax + b$ .

**II - Courbes planes**

Dans cette partie, on se place dans  $\mathbb{R}^2$ , appelé le plan, muni de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée, et orienté par sa base canonique  $\mathcal{B}_c = (\vec{i}, \vec{j})$ . On notera  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé correspondant.

**II-1. Définition d'une courbe du plan**

Une courbe de  $\mathbb{R}^2$  peut être définie comme l'ensemble des points  $M(x, y)$  tels que  $f(x, y) = 0$  avec  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  et  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

Définition :

Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle ligne de niveau de  $f$  l'ensemble des points  $M(x, y)$  tels que  $f(x, y) = k$  avec  $k$  constante réelle.

Théorème : des fonctions implicites (dans le plan)

Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $U$ ,  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation cartésienne  $f(x, y) = 0$  et  $M(x_0, y_0)$  un point de  $\mathcal{C}$  tel que  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ .

Alors, il existe deux intervalles ouverts  $I$  et  $J$  de  $\mathbb{R}$  tels que :

$$I \times J \subset U, (x_0, y_0) \in I \times J \text{ et, pour tout } (x, y) \in I \times J, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0,$$

et une application  $h : I \rightarrow J$  de classe  $C^1$  sur  $I$ , telle que pour tout  $(x, y) \in I \times J$  :

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = h(x).$$

Définitions :

Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f:U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $U$ ,  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation cartésienne  $f(x,y)=0$  et  $M(x_0, y_0)$  un point de  $\mathcal{C}$ .

On dit que  $M$  est un point régulier de  $\mathcal{C}$  si  $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$ .

Dans le cas contraire ( $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = \vec{0}$ ), on dit que  $M$  est un point singulier de  $\mathcal{C}$ .

On dit que la courbe  $\mathcal{C}$  est régulière si tous ses points sont réguliers.

Propriété : Paramétrage local de classe  $C^1$ 

Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f:U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $U$ ,  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation cartésienne  $f(x,y)=0$  et  $M(x_0, y_0)$  un point régulier de  $\mathcal{C}$ .

Il existe un intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{R}$  et une fonction  $\bar{\varphi}:I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , de classe  $C^1$  sur  $I$  et telle qu'au voisinage

de  $M(x_0, y_0)$ , la courbe  $\mathcal{C}$  est paramétrée par  $\bar{\varphi}$ , soit 
$$\begin{cases} x(t) = \bar{\varphi}(t) \cdot \vec{i} \\ y(t) = \bar{\varphi}(t) \cdot \vec{j} \end{cases}$$

**II-2. Tangente en un point régulier**Propriété :

Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f:U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $U$ ,  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation cartésienne  $f(x,y)=0$  et  $M(x_0, y_0)$  un point régulier de  $\mathcal{C}$ .

La courbe  $\mathcal{C}$  admet une normale en  $M$  dirigée par  $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0)$  et une tangente d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0) = 0.$$

Propriété :

Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f:U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  et  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation  $f(x,y)=0$ .

En un point régulier  $M(x_0, y_0)$ , le gradient de  $f$  est orienté dans le sens des valeurs croissantes de  $f$ , c'est-

à-dire qu'au voisinage de  $t=0$ ,  $f\left(x_0 + t \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), y_0 + t \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) - f(x_0, y_0)$  est du signe de  $t$ .

**III – Surfaces et courbes de l'espace**

Dans cette partie, on se place dans  $\mathbb{R}^3$ , appelé l'espace, muni de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée, et orienté par sa base canonique  $\mathcal{B}_c = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On notera  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé correspondant.

**III-1. Définition d'une surface de l'espace**

Une surface de  $\mathbb{R}^3$  peut être définie comme l'ensemble des points  $M(x,y,z)$  tels que  $f(x,y,z)=0$  avec  $f:U \rightarrow \mathbb{R}$  et  $U \subset \mathbb{R}^3$ .

Définition :

Une surface de révolution d'axe  $D$  est une surface  $\mathcal{S}$  dont l'image par toute rotation d'axe  $D$  est elle-même.

**Théorème : des fonctions implicites (dans l'espace)**

Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f:U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $U$ ,  $\mathcal{S}$  la surface d'équation cartésienne  $f(x, y, z) = 0$  et  $M(x_0, y_0, z_0)$  un point de  $\mathcal{S}$  tel que  $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ .

Alors, il existe un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^2$  et un intervalle ouvert  $J$  de  $\mathbb{R}$  tels que :

$$V \times J \subset U, (x_0, y_0, z_0) \in V \times J \text{ et, pour tout } ((x, y), z) \in V \times J, \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0,$$

et une application  $h:V \rightarrow J$  de classe  $C^1$  sur  $V$ , telle que pour tout  $((x, y), z) \in V \times J$  :

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = h(x, y).$$

**Définitions :**

Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f:U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $U$ ,  $\mathcal{S}$  la surface d'équation cartésienne  $f(x, y, z) = 0$  et  $M(x_0, y_0, z_0)$  un point de  $\mathcal{S}$ .

On dit que  $M$  est un point régulier de  $\mathcal{S}$  si  $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$ .

Dans le cas contraire ( $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0) = \vec{0}$ ), on dit que  $M$  est un point singulier de  $\mathcal{S}$ .

On dit que la surface  $\mathcal{S}$  est régulière si tous ses points sont réguliers.

**Définitions :**

Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f:U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $U$ ,  $\mathcal{S}$  la surface d'équation cartésienne  $f(x, y, z) = 0$  et  $M(x_0, y_0, z_0)$  un point régulier de  $\mathcal{S}$ .

Le plan passant par  $M(x_0, y_0, z_0)$  et de vecteur normal  $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0)$  est appelé plan tangent à la surface  $\mathcal{S}$  au point  $M$ .

On dit que tout vecteur normal à ce plan est dit normal à la surface en  $M(x_0, y_0, z_0)$ .

**III-2. Courbes tracées sur une surface**

Si on a une surface  $\mathcal{S}$  définie par l'équation cartésienne  $f(x, y, z) = 0$ , alors toute courbe vérifiant cette équation et une autre est incluse dans  $\mathcal{S}$  : on dit que la courbe est tracée sur la surface  $\mathcal{S}$ .

D'une manière générale, une courbe  $\mathcal{C}$  est tracée sur une surface  $\mathcal{S}$  quand  $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ .

**Propriété :**

Soient  $\mathcal{S}$  une surface d'équation  $f(x, y, z) = 0$ , avec  $f:U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $U$ , ouvert non vide de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{C}$  une courbe paramétrée par  $\vec{\varphi}:I \rightarrow U; t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ , avec  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ , tracée sur  $\mathcal{S}$ , de classe  $C^1$  et régulière. Enfin, soit  $M(x_0, y_0, z_0)$  un point régulier de  $\mathcal{S}$  tel que  $M \in \mathcal{C}$  (donc il existe  $t_0 \in I$  tel que  $\vec{\varphi}(t_0) = \overrightarrow{OM}$ ).

Alors, la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M$  est incluse dans le plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $M$ .

## IV - Retour sur la recherche d'extremums

Dans cette partie,  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  est une application de classe  $C^2$  sur  $U$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Propriété :

Soient  $f$  une application de classe  $C^2$  sur  $U$ , un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $a$  un point critique de  $f$ .

- Si  $H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  (*resp.*  $-H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ), alors  $f$  admet un minimum (*resp.* maximum) local strict en  $a$ .
- Si  $H_f(a) \notin S_n^+(\mathbb{R})$  (*resp.*  $-H_f(a) \notin S_n^+(\mathbb{R})$ ), alors  $f$  n'admet pas de minimum (*resp.* maximum) local en  $a$ .