# *Résumé du chapitre 14 : Espérance et variance*

*Dans tout le chapitre, on se place dans espace probabilisé* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *et X est une variable aléatoire discrète* ( $X(\Omega)$ *est au plus dénombrable) et à valeurs réelles.*

## I - Espérance

### I-1. Définitions

*Définition* :

On dit que $X$ est d'espérance finie si la famille $\left(xP(X=x)\right)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.

Si tel est le cas, on appelle espérance de $X$, notée $E(X)$, le réel $E(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$.

*Définition* : (*hors programme*)

Sous réserve de sommabilité, le moment d'ordre $r$ de $X$ (avec $r\in\mathbb{N}^*$) est $E(X^r)=\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)x^r$.

### I-2. Propriétés de l'espérance

*Propriété* :

Si $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance finie, alors $E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(X\geq n)$.

*Propriété* : *Théorème du transfert*

Soit $f$ une application définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs réelles.

La variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\left(f(x)P(X=x)\right)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et, dans ce cas, on a :

$$E\left(f(X)\right)=\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$

*Propriétés* :

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles telles que $|X|\leq Y$. Si $Y$ est d'espérance finie, alors $X$ aussi.

*Propriétés* :

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles d'espérance finie.

- *Linéarité de l'espérance* : pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$.
- *Positivité de l'espérance* : si $X\geq 0$ (pour tout $\omega\in\Omega$, $X(\omega)\geq 0$) alors $E(X)\geq 0$.
- *Croissance de l'espérance* : si $X\leq Y$ (pour tout $\omega\in\Omega$, $X(\omega)\leq Y(\omega)$) alors $E(X)\leq E(Y)$.

*Définition* :

Si $X$ est d'espérance finie, la variable $X - E(X)$ est une variable aléatoire dite centrée.

*Propriété* :

Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes et d'espérances finies, alors $XY$ est d'espérance finie et :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

*Propriété* : *Inégalité de Markov*

Si $X$ est une variable aléatoire réelle positive sur $\Omega$ et d'espérance finie, alors pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

### I-3. Espérance des lois usuelles

*Propriété* :

- Si $X$ suit une loi uniforme avec $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$, alors $E(X) = \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$.
- Si $X$ suit une loi de Bernoulli avec $X(\Omega) = \{a, b\}$ et $P(X = a) = p$, alors $E(X) = pa + (1 - p)b$.
- Si $X$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.
- Si $X$ suit une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, alors $E(X) = \dfrac{1}{p}$.
- Si $X$ suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$.

## II - Variance

### II-1. Définition

*Propriété* :

Si la variable aléatoire $X^2$ est d'espérance finie, alors $X$ est elle-même d'espérance finie.

*Définitions* :

Si $X^2$ est d'espérance finie, la variance de $X$ est $V(X) = E\left(\left[X - E(X)\right]^2\right)$ et l'écart-type de $X$ est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

*Propriété* : *Formule de Koenig-Huygens*

Dans les hypothèses précédentes :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

## II-2. Propriétés de la variance

*Propriété* :

Soit $X$ est une variable aléatoire réelle admettant une variance finie.

Pour tous réels $a$ et $b$, la variable aléatoire $aX+b$ admet une variance finie et on a :

$$V(aX+b)=a^2V(X).$$

*Définition* :

Si $X$ admet une variance non nulle, alors la variable $\dfrac{X}{\sigma(X)}$ est appelée variable réduite.

*Propriété* : *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

On suppose que $X$ admet une variance. Pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$ :

$$P\big(|X-E(X)|\geq a\big)\leq\frac{V(X)}{a^2}.$$

## II-3. Variance des lois usuelles

*Propriété* :

- Si $X$ suit une loi de Bernoulli avec $X(\Omega)=\{a,b\}$ et $P(X=a)=p$, alors $V(X)=(b-a)^2p(1-p)$.
- Si $X$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors $V(X)=np(1-p)$.
- Si $X$ suit une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, alors $V(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$.
- Si $X$ suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, alors $V(X)=\lambda$.

## II-4. Covariance

*Dans cette partie, on considère deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y.*

*Lemme* :

Si $X^2$ et $Y^2$ sont d'espérance finie, la variable $XY$ l'est aussi.

*Définitions* :

Si $X^2$ et $Y^2$ soient d'espérance finie, on appelle covariance de $X$ et $Y$ le réel :

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E\big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\big].$$

*Propriété* :

On a : $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.

*Propriétés* :

La covariance est symétrique et bilinéaire. Autrement dit :

- $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$.
- Si $X_1$, $X_2$ et $Y$ sont trois variables aléatoires réelles discrètes dont le carré est d'espérance finie, alors pour tous réels $a$ et $b$, on a :

$$\mathrm{cov}(aX_1+bX_2,Y)=a\,\mathrm{cov}(X_1,Y)+b\,\mathrm{cov}(X_2,Y)$$
$$\mathrm{cov}(Y,aX_1+bX_2)=a\,\mathrm{cov}(Y,X_1)+b\,\mathrm{cov}(Y,X_2)$$

*Propriété* :

Pour tous réels $a$ et $b$, on a : $V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)+2ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$.

*Propriété* :

Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors : $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.

*Propriété* : *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires telles que $E(X^2)$ et $E(Y^2)$ existent, alors :

$$|E(XY)|\leq\sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}\,.$$

Et on a égalité si et seulement si $X$ et $Y$ sont proportionnelles avec probabilité de 1.

*Propriété* :

Si $X_1,\dots,X_n$ sont des variables aléatoires réelles discrètes telles que $X_i^2$ est d'espérance finie pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, alors :

$$V(X_1+\dots+X_n)=V(X_1)+\dots+V(X_n)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{cov}(X_i,X_j)\,.$$

Et, si $X_1,\dots,X_n$ sont deux à deux indépendantes :

$$V(X_1+\dots+X_n)=V(X_1)+\dots+V(X_n)\,.$$

## II-5. **Loi faible des grands nombres**

*Théorème* : *Loi faible des grands nombres*

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de variance finie, alors, en posant $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$, $m=E(X_1)$ et $\sigma=\sigma(X_1)$, on a pour tout réel $\varepsilon>0$ :

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n-m\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\qquad\text{et}\qquad P\left(\left|\frac{1}{n}S_n-m\right|\geq\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\,.$$

# III - Espérance, variance et fonction génératrice

## III-1. Espérance et fonction génératrice

*Propriété* :

> La variable aléatoire $X$ admet une espérance finie $E(X)$ si et seulement si $G_X$ est dérivable en 1.
>
> Si tel est le cas, on a alors :
>
> $$E(X) = G_X'(1).$$

## III-2. Variance et fonction génératrice

*Propriété* :

> La variable aléatoire $X$ admet une variance si et seulement si $G_X$ est deux fois dérivable en 1.
>
> Si tel est le cas, on a alors :
>
> $$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2.$$