Résumé du chapitre 13 : Variables aléatoires discrètes

Dans tout le chapitre, Ω est un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{A}$.

I - Variables aléatoires discrètes

I-1. Généralités

Définition :

Une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application définie sur Ω, dont l'image $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et telle que l'image réciproque de tout singleton $\{x\} \subset X(\Omega)$ par X appartient à $\mathcal{A}$.

Lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle (var).

Propriété :

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Pour tout $U \subset X(\Omega)$, $X^{-1}(U)$ est un événement, c'est-à-dire $X^{-1}(U) \in \mathcal{A}$.

Notations :

- L' évènement $X^{-1}(U)$ est noté $(X \in U)$ ou $\{X \in U\}$.
- Lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, pour un réel x quelconque, on peut noter $(X \geq x)$ (et analogues avec $\leq, <, >$), pour désigner l'évènement $X^{-1}\left(\{z \in \Omega,\ z \geq x\}\right) = X^{-1}\left([x, +\infty[\right)$ (et analogues).

Corollaire :

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Si f est une fonction définie sur $X(\Omega)$, alors $f(X) = f \circ X$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

I-2. Loi d'une variable aléatoire discrète

Dans toute la suite, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X est une variable aléatoire discrète.

Propriété et définition :

L'application $P_X : \mathscr{P}\left(X(\Omega)\right) \to [0;1]\,; A \mapsto P(X \in A)$ est une loi de probabilité sur $\left(X(\Omega), \mathscr{P}\left(X(\Omega)\right)\right)$, appelée loi de la variable aléatoire X.

Propriété :

La probabilité P_X est parfaitement déterminée par la donnée des $P(X = x)$ quand x décrit $X(\Omega)$.

Propriété :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω telles que $X \sim Y$.

Pour toute fonction f définie sur $X(\Omega) = Y(\Omega)$, on a $f(X) \sim f(Y)$.

II - Couple de variables aléatoires discrètes

Dans cette partie, X et Y sont deux variables aléatoires discrètes.

Le couple (X, Y) est une variable aléatoire sur Ω et on note :

- pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$P\big(X = x, Y = y\big) = P\big((X = x) \cap (Y = y)\big).$$

- pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}\big(X(\Omega)\big) \times \mathscr{P}\big(Y(\Omega)\big)$:

$$P\big(X \in A, Y \in B\big) = P\big((X \in A) \cap (Y \in B)\big).$$

II-1. Loi conjointe et lois marginales

Définitions :

> L'application de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $[0;1]$, qui, à tout (x, y) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, associe $P\big(X = x, Y = y\big)$ est appelée loi conjointe du couple (X, Y).
>
> Les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y.

Propriété :

> Pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}\big(X(\Omega)\big) \times \mathscr{P}\big(Y(\Omega)\big)$, on a :
>
> $$P\big(X \in A, Y \in B\big) = \sum_{(a,b) \in A \times B} P\big(X = a, Y = b\big).$$

Corollaire :

> Soient A et A' sont deux parties disjointes de $X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$. On a :
>
> $$P\big(X \in A \cup A', Y \in B\big) = P\big(X \in A, Y \in B\big) + P\big(X \in A', Y \in B\big).$$

II-2. Indépendance

a. Loi conditionnelle :

Définition :

> Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$. L'application :
>
> $$P_{(Y=y)} : X(\Omega) \to [0;1] \ ; \ x \mapsto P_{(Y=y)}(X = x)$$
>
> est appelée loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$.

b. Indépendance d'un couple de variables aléatoires :

Définition :

> Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si, pour toutes parties $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, on a :
>
> $$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B).$$
>
> Autrement dit, les évènements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.
>
> On note $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Propriété :

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$:

$$P(X=x,Y=y)=P(X=x)\times P(Y=y).$$

Propriété :

Si X et Y sont indépendantes, alors pour toutes fonctions f et g, définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

c. Mutuelle indépendance :

Définitions :

Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires sur Ω. On dit que $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes ou mutuellement indépendantes si pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega)$, les évènements $(X_1=x_1)$, … , $(X_n=x_n)$ sont mutuellement indépendants.

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires sur Ω, les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes si pour toute partie finie $A\subset\mathbb{N}$, la famille finie $(X_n)_{n\in A}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) sont des variables aléatoires qui suivent toutes la même loi de probabilité et sont indépendantes.

Propriété :

Si $X_1,\dots,X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors, quel que soit $(A_1,\dots,A_n)\in\mathscr{P}\left(X_1(\Omega)\right)\times\dots\times\mathscr{P}\left(X_n(\Omega)\right)$, les événements $(X_i\in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

d. Lemme des coalitions :

Propriété : *Lemme des coalitions*

Si $X_1,\dots,X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et f et g sont des applications définies respectivement sur $X_1(\Omega)\times\dots\times X_m(\Omega)$ et $X_{m+1}(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega)$, alors les variables aléatoires $f(X_1,\dots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\dots,X_n)$ sont indépendantes.

III - Lois usuelles

III-1. Lois usuelles avec $X(\Omega)$ fini

a. Loi uniforme :

Si X est une variable aléatoire sur Ω, la loi P_X peut être uniforme quand $X(\Omega)$ est fini : toutes les valeurs de $X(\Omega)$ ont la même probabilité, égale à $\frac{1}{p}$ avec $p=\mathrm{Card}\left(X(\Omega)\right)$.

b. Loi de Bernoulli :

Définitions :

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles (notées en général succès et échec).

Une variable aléatoire de Bernoulli est une variable aléatoire X telle que $X(\Omega)=\{0,1\}$.

Une <u>loi de Bernoulli</u> est la loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli ou à variable aléatoire de Bernoulli.

Si $p \in [0;1]$ est la probabilité de « succès » ou de $(X=1)$, p est appelé <u>paramètre</u> de la loi, qui est alors notée $\mathscr{B}(p)$. Pour une variable aléatoire de Bernoulli, *X*, on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ ou $X \sim \mathscr{B}(p)$.

c. <u>Loi binomiale</u> :

<u>Définitions</u> :

Un <u>schéma de Bernoulli</u> est une expérience aléatoire consistant à répéter une épreuve de Bernoulli plusieurs fois de suite et de manière indépendante.

Une <u>loi binomiale</u> est la loi suivie par la variable aléatoire donnant le nombre de succès à l'issue d'un schéma de Bernoulli. Si l'épreuve de Bernoulli est répétée *n* fois et *p* est le paramètre associé à l'épreuve, la loi binomiale est notée $\mathscr{B}(n,p)$ et *n* et *p* sont les <u>paramètres</u> de cette loi.

On note : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ ou bien $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

<u>Propriété</u> :

Soit *X* une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. On a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

<u>Propriété</u> :

Si $X_1, \dots, X_n$ sont *n* variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes et toutes de même paramètre *p*, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

III-2. <u>Loi géométrique</u>

<u>Définition</u> :

Si on répète indéfiniment et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre *p*, alors le rang d'apparition du premier succès suit une <u>loi géométrique de paramètre *p*</u>.

On note : $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ ou $X \sim \mathscr{G}(p)$.

<u>Propriété</u> :

Soit *X* une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p.$$

<u>Propriété</u> :

Si une variable aléatoire *X* suit une loi géométrique de paramètre *p*, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(X>n) = (1-p)^n.$$

III-3. Loi de Poisson

Définition :

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

On note : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ ou $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

IV - Série génératrice

IV-1. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

Définition :

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La fonction ou série génératrice de X est la série entière :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n .$$

Propriétés :

Le rayon de convergence d'une série génératrice G_X est au moins égal à 1 et G_X est continue sur $[-1,1]$ et de classe C^∞ sur $]-1,1[$ (au moins).

La loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ est entièrement caractérisée par sa fonction génératrice.

Propriété :

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Quand les séries convergent, on a :

$$G_{X_1+X_2} = G_{X_1} G_{X_2} .$$

Le résultat se généralise à n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes :

$$G_{X_1+\ldots+X_n} = G_{X_1} \ldots G_{X_n} .$$

IV-2. Série génératrice des lois usuelles

Propriété :

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières.

- Si $X(\Omega)$ est fini de cardinal N et X suit une loi uniforme, alors $G_X(t) = \frac{1}{N} \sum_{n \in X(\Omega)} t^n$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, $G_X(t) = pt + 1 - p$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, $G_X(t) = (pt + 1 - p)^n$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, $G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$ sur $\left]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ sur $\mathbb{R}$.