

## Résumé du chapitre 11 : Intégrales à paramètre

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire,  $I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et les fonctions sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Suites et séries de fonctions intégrables

Théorème : (de convergence dominée)

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions définies sur  $I$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue par morceaux sur  $I$ .
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$ .
- Il existe une fonction  $\varphi$ , continue par morceaux et intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $t \in I$ , on a  $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$ .

Alors :

$$f_n \text{ et } f \text{ sont intégrables sur } I \text{ et } \int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt.$$

Théorème : (d'intégration terme à terme)

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions définies sur  $I$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue par morceaux et intégrable sur  $I$ .
- La série  $\sum f_n$  converge simplement vers une fonction  $f$ , continue par morceaux sur  $I$ .
- La série  $\sum \int_I |f_n|$  converge.

Alors :

$$f \text{ est intégrable sur } I \text{ et } \int_I f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

### Intégrales à paramètre

Théorème : (de convergence dominée à paramètre continu)

Soit  $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$  une fonction définie sur  $I \times J$ , où  $I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$  ou  $a$  est une extrémité, éventuellement infinie, de  $I$ .

- pour tout  $t \in J$ ,  $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$  ;
- pour tout  $x \in I$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  et  $t \mapsto \ell(t)$  sont continues par morceaux sur  $J$  ;
- il existe une fonction  $\varphi$  positive, continue par morceaux et intégrable sur  $J$ , telle que pour tout  $(x, t) \in I \times J$ , on ait  $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ .

Alors, pour tout  $x \in I$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  et  $\ell$  sont intégrables sur  $J$  et  $\int_J f(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_J \ell(t) dt$ .

*Théorème : (continuité)*

Soit  $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$  une fonction définie sur  $I \times J$ .

- Pour tout  $x \in I$ ,  $t \mapsto f(x,t)$  est continue par morceaux sur  $J$ .
- Pour tout  $t \in J$ ,  $x \mapsto f(x,t)$  est continue sur  $I$ .
- Il existe une fonction  $\varphi$  positive, continue par morceaux et intégrable sur  $J$ , telle que pour tout  $(x,t) \in I \times J$ , on ait  $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ .

Alors :

Pour tout  $x \in I$ ,  $t \mapsto f(x,t)$  est intégrable sur  $J$  et  $x \mapsto \int_J f(x,t)dt$  est continue sur  $I$ .

*Théorème : (de dérivation sous le signe somme)*

Soit  $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$  une fonction définie sur  $I \times J$ .

- Pour tout  $x \in I$ ,  $t \mapsto f(x,t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $J$ .
- Pour tout  $t \in J$ ,  $x \mapsto f(x,t)$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ .
- Pour tout  $x \in I$ ,  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$  est continue par morceaux sur  $J$ .
- Il existe une fonction  $\varphi$  positive, continue par morceaux et intégrable sur  $J$ , telle que pour tout  $(x,t) \in I \times J$ , on ait  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \varphi(t)$ .

Alors :

- Pour tout  $x \in I$ ,  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$  est intégrable sur  $J$ .
- La fonction  $x \mapsto \int_J f(x,t)dt$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ , de dérivée  $x \mapsto \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ .

*Théorème : (extension aux fonctions de classe  $C^k$ )*

Soient  $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$  une fonction définie sur  $I \times J$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ .

- Pour tout  $t \in J$ ,  $x \mapsto f(x,t)$  est de classe  $C^k$  sur  $I$ .
- Pour tout  $x \in I$  et tout  $i \in \{0, k-1\}$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $J$ .
- Pour tout  $x \in I$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$  est continue par morceaux sur  $J$ .
- Il existe une fonction  $\varphi$  positive, continue par morceaux et intégrable sur  $J$ , telle que pour tout  $(x,t) \in I \times J$ , on ait  $\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leq \varphi(t)$ .

Alors :

- Pour tout  $x \in I$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$  est intégrable sur  $J$ .
- La fonction  $x \mapsto \int_J f(x,t)dt$  est de classe  $C^k$  sur  $I$ , de dérivées successives  $x \mapsto \int_J \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt$ .

Corollaire : (classe  $C^\infty$ )

Soit  $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$  une fonction définie sur  $I \times J$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

- pour tout  $t \in J$ ,  $x \mapsto f(x,t)$  est de classe  $C^k$  sur  $I$ ;
- pour tout  $x \in I$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$  est continue par morceaux sur  $J$ ;
- il existe une fonction  $\varphi_k$  positive, continue par morceaux et intégrable sur  $J$ , telle que pour tout  $(x,t) \in I \times J$ , on ait  $\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leq \varphi_k(t)$ .

Alors :

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in I$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$  est intégrable sur  $J$ .
- La fonction  $x \mapsto \int_J f(x,t) dt$  est de classe  $C^\infty$  sur  $I$ , de dérivées successives  $x \mapsto \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) dt$ .